

OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA 2016

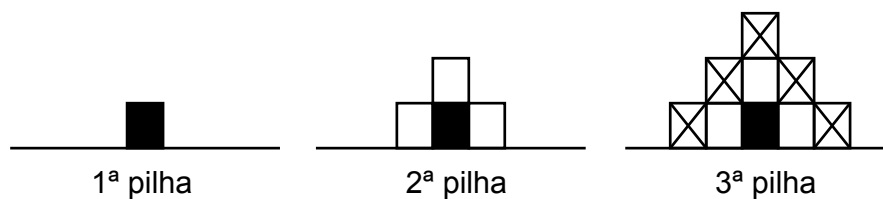
Nível II - 2ª fase

Nome completo:	
Endereço:	
Escola:	Série:
Telefone:	Celular:
E-mail:	

Instruções:

- Ao preencher as informações acima, use letra legível.
- Não é permitido o uso de nenhum aparelho eletrônico como, por exemplo, celular, calculadora etc.
- A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
- A duração da prova é de 3 horas.
- O tempo mínimo de permanência em sala é de 30 minutos.
- A prova tem 4 questões discursivas. Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.
- Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens (escreva o raciocínio mesmo que a solução esteja incompleta).

1. Emanuelle é dona de um supermercado e quer fazer pilhas de latas na entrada para chamar a atenção de seus clientes. Ela quer utilizar três tipos de produtos diferentes: milho (■), ervilha (□) e feijão (⊗). As três primeiras pilhas estão dispostas como na figura:



Ela começará com uma lata de milho (1ª pilha). Em seguida, ela acrescentará latas de ervilha ao lado da lata de milho e no topo (2ª pilha). Já na 3ª pilha ela colocará latas de feijão ao lado das latas de ervilha e no topo. Emanuelle sempre manterá essa ordem para montar as pilhas.

- (a) Qual dos três produtos estará no topo da 6ª pilha?

- (b) Qual dos três produtos estará no topo da 155ª pilha?

- (c) Quantas latas tem ao todo na 2016ª pilha?

2. A desigualdade $x^2 \geq 0$ é muito conhecida e se aplica a todos os números reais. Uma outra desigualdade famosa e muito útil é a desigualdade das médias:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

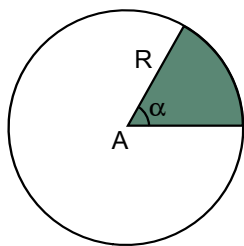
(a) Demonstre a desigualdade das médias.

(b) Prove que se a , b e c são reais não nulos, tais que $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$, então $a = b = c$.

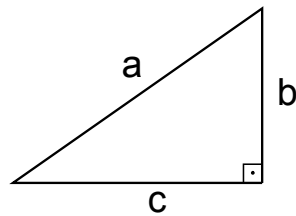
(c) Determine x e y sabendo que

$$\frac{2x - 107}{2y + 107} = \frac{2y + 107}{3925} = \frac{3925}{2x - 107}.$$

3. A figura (I) mostra uma circunferência com centro no ponto A e de raio igual a R . A região sombreada é chamada setor circular e a área de um setor circular é dada por: $A_{\text{setor}} = \frac{\alpha}{360}\pi R^2$, sendo que o ângulo α é dado em grau. Na figura (II) temos um triângulo retângulo e sabe-se que os seus lados satisfazem a relação $a^2 = b^2 + c^2$ conhecida como teorema de Pitágoras.

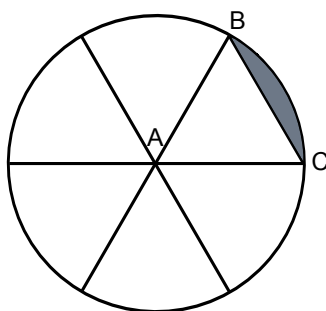


(I)



(II)

A circunferência abaixo de centro em A foi dividada em 6 setores circulares iguais.



(a) Calcule a área do triângulo ABC.

(b) Calcule a área sombreada.

- Pedro escreveu um número inteiro em cada casa de um tabuleiro 21×21 . Isso foi feito de modo que, em cada quadrado 4×4 e em cada quadrado 5×5 , a soma dos números escritos fosse igual a 0. Prove que a soma dos números escritos na borda do tabuleiro é igual a 0.