

OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA 2016

Nível III - 2ª fase

Nome completo:	
Endereço:	
Escola:	Série:
Telefone:	Celular:
E-mail:	

Instruções:

- Ao preencher as informações acima, use letra legível.
- Não é permitido o uso de nenhum aparelho eletrônico como, por exemplo, celular, calculadora etc.
- A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
- A duração da prova é de 3 horas.
- O tempo mínimo de permanência em sala é de 30 minutos.
- A prova tem 4 questões discursivas. Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.
- Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens (escreva o raciocínio mesmo que a solução esteja incompleta).

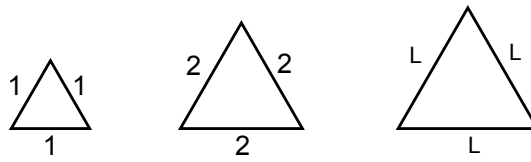
1. Pedro escreveu um número inteiro em cada casa de um tabuleiro 21×21 . Isso foi feito de modo que, em cada quadrado 4×4 e em cada quadrado 5×5 , a soma dos números escritos fosse igual a 0. Prove que a soma dos números escritos na borda do tabuleiro é igual a 0.

2. Qual a probabilidade de se escolher três números do conjunto

$$\{1, 2, 3, \dots, 2015, 2016\},$$

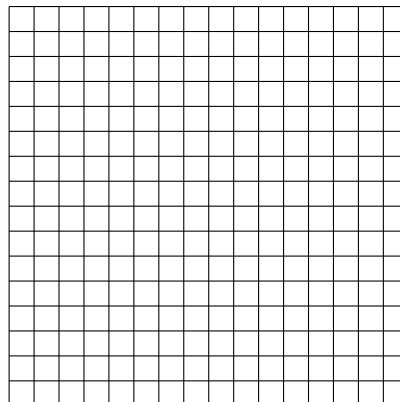
com repetição, de modo que o produto deles seja divisível por 24?

3. Um triângulo que possui todos os lados iguais é chamado de triângulo equilátero. A figura apresenta três destes triângulos.



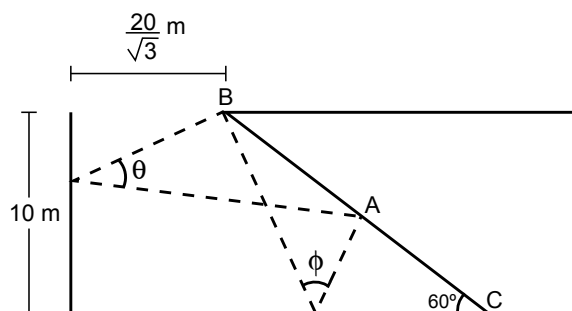
- (a) Calcule a altura do triângulo de lado igual a 2. Encontre uma fórmula para a altura h de um triângulo equilátero de lado L .

- (b) A malha da figura é formada por quadrados de lados iguais a 1. Desenhe sobre essa malha um triângulo de lados 13, 14 e 15 de modo que todos seus vértices estejam sobre os cruzamentos da malha.



- (c) Prove que não é possível desenhar um triângulo equilátero sobre uma malha quadriculada do mesmo modo feito no item (b).

4. Um garoto está no ponto B em cima de um barranco, conforme o desenho. Ele deseja acertar um alvo, localizado no ponto A, jogando uma bola no solo e outra na parede que tem 10 m de altura. A distância do ponto B à parede é de $\frac{20}{\sqrt{3}}$ m e a distância do ponto B ao ponto A é igual à distância de A até C. Sabe-se que o ângulo de incidência da bola ao chocar com um obstáculo é igual ao ângulo de reflexão.



Dados: $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - (\tan x)^2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

(a) Calcule $\tan \theta$.

(b) Calcule $\tan \phi$.