# I OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA - 2016

## NÍVEL II - 2ª FASE - Gabarito

1. (a) A sequência de latas é:

| | | |
|---|---|---|
| 1ª pilha | $\rightarrow$ | milho |
| 2ª pilha | $\rightarrow$ | ervilha |
| 3ª pilha | $\rightarrow$ | feijão |
| 4ª pilha | $\rightarrow$ | milho |
| 5ª pilha | $\rightarrow$ | ervilha |
| 6ª pilha | $\rightarrow$ | feijão |

Assim, no topo da 6ª pilha haverá uma lata de feijão.

(b) Como pode ser observado no item (a) existe um padrão: as pilhas de ordem múltipla de 3 (3, 6, 9, ...) terão uma lata de feijão no topo, as que deixam resto 1 quando divididas por 3 (1, 4, 7, ...) terão milho no topo e as que deixam resto 2 quando divididas por 3 (2, 5, 8, ...) terão ervilha. Como $155 \div 3 = 51 + 2$, no topo da 155ª pilha terá uma lata de ervilha.

(c) Solução 1: A cada pilha, Emanuelle adiciona um número ímpar - em sequência - de latas:

| **Pilha** | **Total de latas** |
|---|---|
| 1 | $1$ |
| 2 | $1+3$ |
| 3 | $1+3+5$ |
| 4 | $1+3+5+7$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)$ |

Portanto, na 2016ª pilha haverá:

$$1+3+5+7+\cdots+(2\times 2016-1) = 1+3+5+7+\cdots+4031$$

latas.

OBS: Não é necessário efetuar a soma, mas o resultado é $1+3+5+7+\cdots+4031 = 2016^2$.

Solução 2: Pode-se observar que há $1 = 1^2$ lata na pilha 1, $4 = 2^2$ latas na pilha 2, $9 = 3^2$ na pilha 3, $16 = 4^2$ na pilha 4 e assim por diante. Seguindo este padrão haverá $2016^2$ latas na 2016ª pilha.

2. (a) Sabemos que $x^2 \geq 0$. Fazendo $x = y - z$:

$$(y-z)^2 \geq 0$$
$$y^2 - 2yz + z^2 \geq 0$$
$$\frac{y^2+z^2}{2} \geq yz.$$

Fazendo $y = \sqrt{a}$ e $z = \sqrt{b}$ (para $a \geq 0$ e $b \geq 0$):

$$\frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2}{2} \geq \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\ .$$

(b) A expressão $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ implica em três igualdades: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, $\frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ e $\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$. Ou, de maneira equivalente:

$$ac = b^2, \quad ab = c^2 \quad \text{e} \quad bc = a^2.$$

Das expressões acima, concluímos que só há duas possibilidades: ou $a > 0, b > 0$ e $c > 0$ ou $a < 0, b < 0$ e $c < 0$ (lembrando que $a$, $b$ e $c$ são não nulos).
Suponha que $b \neq c$ e subraia a 1ª da 2ª equação:

$$\begin{aligned} b^2 - c^2 &= ac - ab \\ b^2 - c^2 &= a(c-b) \\ (b+c)(b-c) &= a(c-b) \\ (b+c)(b-c) &= -a(b-c). \end{aligned}$$

Como $b \neq c$, temos que $b - c \neq 0$ e, então, podemos dividir a última equação por $(b-c)$ resultando em:

$$b + c = -a.$$

Porém, a equação acima contraria as duas possibilidades: $a > 0, b > 0$ e $c > 0$ ou $a < 0, b < 0$ e $c < 0$. Portanto, $b = c$. E da igualdade $ac = b^2$ segue que $a = c$. Logo, $a = b = c$.

(c) De acordo com o item (b) temos:

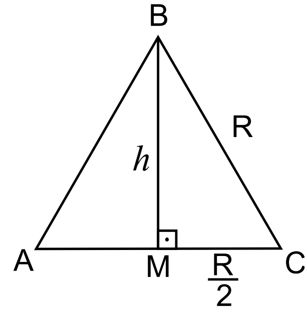
$$\begin{cases} 2x - 107 = 2y + 107 \\ 2x - 107 = 3925 \\ 2y + 107 = 3925 \end{cases}$$

Das duas últimas equações, concluímos que $x = 2016$ e $y = 1909$.

3. (a) Os setores são iguais. Então, eles dividem o ângulo de 360° em 6 partes iguais:

$$\frac{360°}{6} = 60°.$$

Assim, o ângulo $B\hat{A}C$ mede 60°. Os segmentos AB e AC são iguais, pois são raios da circunferência. Logo, o triângulo ABC é isósceles e, como $B\hat{A}C = 60°$, concluímos que os outros ângulos desse triângulo são iguais a 60°. Portanto, o triângulo ABC é equilátero e de lado igual a $R$ (o raio da circunferência). A algura $h$ do triângulo ABC divide o lado AC na metade (pois, os triângulos ABM e CBM são congruentes) - veja figura.



O triângulo CBM é retângulo e, portanto, é válido o teorema de Pitágoras:

$$R^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + h^2$$
$$h^2 = R^2 - \frac{R^2}{4}$$
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

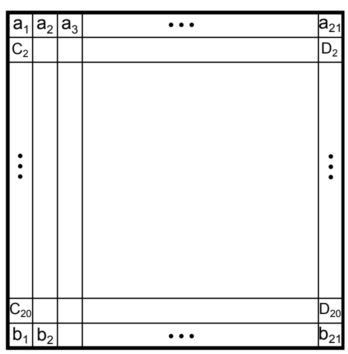
Finalmente, a área $\mathcal{A}$ do triângulo ABC é igual a:

$$\mathcal{A}_{\text{ABC}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R \cdot R\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2.$$

(b) A área da região sombreada é igual à área do setor menos a área do triângulo ABC. Do enunciado e do item (b):

$$A_{\text{sombreada}} = \frac{60^\circ}{360^\circ}\pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2.$$

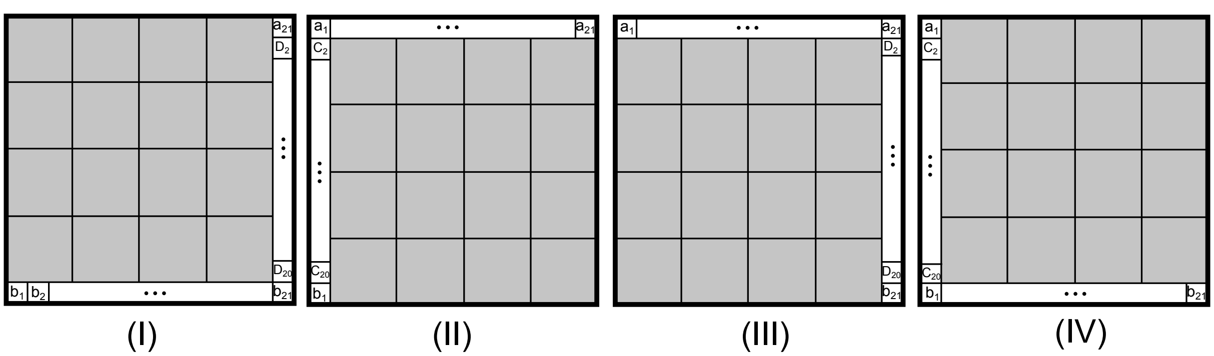
4. Considere o quadrado $21 \times 21$ da figura e seja $S$ a soma dos números escritos em todas as casas do tabuleiro.




A soma $B$ dos números escritos na borda do tabuleiro é dada por:

$$B = a_1 + a_2 + \cdots + a_{21} + C_2 + \cdots + C_{20} + D_2 + \cdots + D_{20} + b_1 + \cdots + b_{21}. \qquad (1)$$

O tabuleiro pode ser dividido como nas figuras (I), (II), (III) ou (IV).



Em todos os casos, a soma dos números das regiões cinzas é igual a zero, pois estas regiões estão subdivididas em quadrados $5 \times 5$. Assim, por (I):

$$S = a_{21} + D_2 + \cdots + D_{20} + b_1 + \cdots + b_{21},$$

por (II):

$$S = a_1 + \cdots + a_{21} + C_2 + \cdots + C_{20} + b_1,$$

por (III):

$$S = a_1 + \cdots + a_{21} + D_2 + \cdots + D_{20} + b_{21},$$

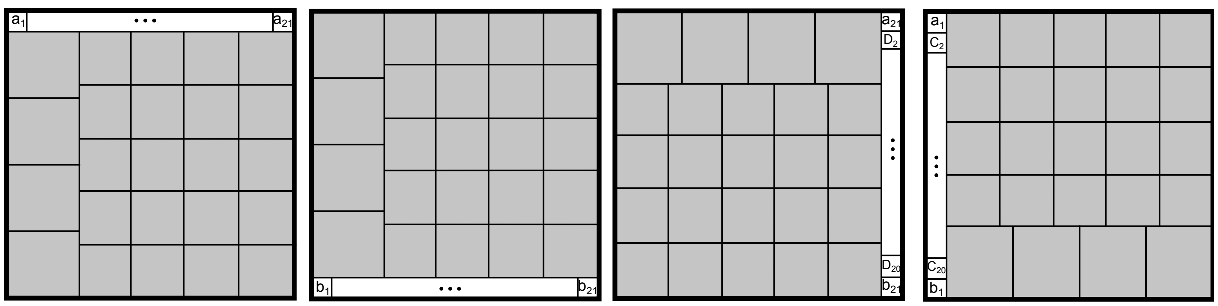
e por (IV):

$$S = a_1 + C_2 + \cdots + C_{20} + b_1 + \cdots + b_{21}.$$

Somando estas 4 equações e usando a equação (1):

$$4S = 2B + a_1 + a_{21} + b_1 + b_{21}. \tag{2}$$

Outras maneiras de dividir o tabuleiro é como nas figuras (i), (ii), (iii) e (iv).



(i) (ii) (iii) (iv)

Novamente, a soma dos números das regiões cinzas é igual a zero, pois estas regiões estão subdivididas em quadrados $4 \times 4$ e $5 \times 5$. E desta vez temos, por (i):

$$S = a_1 + \cdots + a_{21},$$

por (ii):

$$S = b_1 + \cdots + b_{21},$$

por (iii):

$$S = a_{21} + D_2 + \cdots + D_{20} + b_{21},$$

e por (iv):

$$S = a_1 + C_2 + \cdots + C_{20} + b_1.$$

Somando estas 4 equações e usando a expressão (1):

$$4S = B + a_1 + a_{21} + b_1 + b_{21}. \tag{3}$$

Subtraindo a equação (2) da equação (3) encontramos:

$$B = 0.$$

Isto é, a soma dos números escritos na borda do tabuleiro é igual a 0.