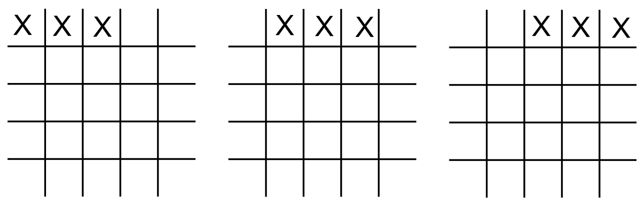
I OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA - 2016

NÍVEL I - 2ª FASE - Gabarito

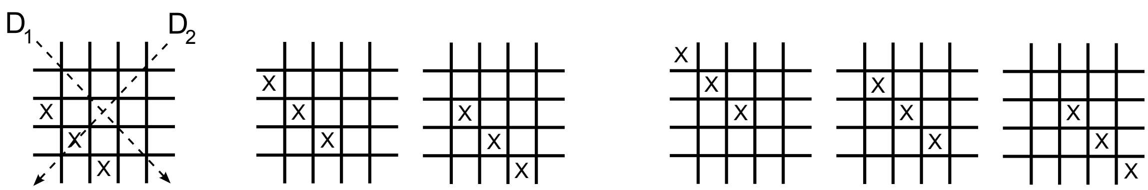
1. (a) Há 3 possibilidades de vencer o jogo marcando a sequência em cada linha, 3 possibilidades marcando em cada coluna e 2 possibilidades marcando as diagonais totalizando $3 + 3 + 2 = 8$ possibilidades.

   (b) Em uma linha há 3 possibilidades de vencer, como mostra a figura.



Como são 5 linhas temos $3 \times 5 = 15$ possibilidades. O mesmo vale para colunas. Logo, há mais 15 possibilidades.

Na diagonal, há 1 possibilidade como na figura (I), 2 possibilidades como na figura (II) e 3 como em (III).



(I) (II) (III)

Acima da diagonal D_1 há possibilidades análogas às situações (I) e (II). Assim, temos no total $1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9$ possibilidades. O mesmo é válido para diagonais na direção de D_2. Portanto, há no total

$$\underbrace{15}_{\text{linha}} + \underbrace{15}_{\text{coluna}} + \underbrace{9 + 9}_{\text{diagonais}} = 48 \text{ possibilidades}$$

de vencer o jogo da velha em um tabuleiro 5×5 marcando 3 símbolos em sequência.

2. (a) A sequência de latas é:

$$\begin{array}{lcc} 1^{\text{a}} \text{ pilha} & \rightarrow & \text{milho} \\ 2^{\text{a}} \text{ pilha} & \rightarrow & \text{ervilha} \\ 3^{\text{a}} \text{ pilha} & \rightarrow & \text{feijão} \\ 4^{\text{a}} \text{ pilha} & \rightarrow & \text{milho} \\ 5^{\text{a}} \text{ pilha} & \rightarrow & \text{ervilha} \\ 6^{\text{a}} \text{ pilha} & \rightarrow & \text{feijão} \end{array}$$

Assim, no topo da 6ª pilha haverá uma lata de feijão.

(b) Como pode ser observado no item (a) existe um padrão: as pilhas de ordem múltipla de 3 (3, 6, 9, ...) terão uma lata de feijão no topo, as que deixam resto 1 quando divididas por 3 (1, 4, 7, ...) terão milho no topo e as que deixam resto 2 quando divididas por 3 (2, 5, 8, ...) terão ervilha. Como $155 \div 3 = 51 + 2$, no topo da 155ª pilha terá uma lata de ervilha.

(c) Solução 1: A cada pilha, Emanuelle adiciona um número ímpar - em sequência - de latas:

Pilha	**Total de latas**
1	1
2	$1+3$
3	$1+3+5$
4	$1+3+5+7$
$\vdots$	$\vdots$
n	$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)$

Portanto, na 2016ª pilha haverá:

$$1+3+5+7+\cdots+(2\times 2016-1) = 1+3+5+7+\cdots+4031$$

latas.

OBS: Não é necessário efetuar a soma, mas o resultado é $1+3+5+7+\cdots+4031 = 2016^2$.

Solução 2: Pode-se observar que há $1 = 1^2$ lata na pilha 1, $4 = 2^2$ latas na pilha 2, $9 = 3^2$ na pilha 3, $16 = 4^2$ na pilha 4 e assim por diante. Seguindo este padrão haverá 2016^2 latas na 2016ª pilha.

3. (a) De acordo com a definição:

$$14 * 11 = \frac{4\times 14\times 11 - 1}{3} = \frac{615}{3} = 205.$$

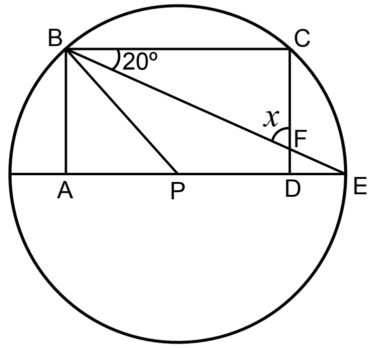
(b) Da definição:

$$\begin{aligned} &x * 3 = 9\\ &\frac{4x.3-1}{3} = 9\\ &\frac{12x-1}{3} = 9\\ &12x - 1 = 27\\ &x = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

(c) Anulada.

4. (a) O ângulo BCD mede 90°, pois ABCD é um retângulo. O ângulo x - veja figura - é tal que

$$20^\circ + 90^\circ + x = 180^\circ \quad \text{(soma dos ângulos internos do triângulo BCF).}$$



Logo, $x = 70°$. O ângulo DFE também mede 70° porque ele é oposto pelo vértice ao ângulo BFC. Uma vez que $F\hat{D}E = 90°$, o ângulo FED mede 20°.

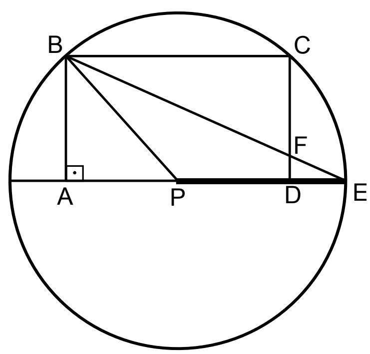
Os segmentos PB e PE são iguais, pois eles são raios da circunferência. Assim, o triângulo PBE é isósceles e

$$P\hat{B}E = P\hat{E}B$$
$$P\hat{B}E = 20°.$$

Da soma dos ângulos internos do triângulo PBE concluímos que $B\hat{P}E = 140°$. Finalmente,

$$B\hat{P}A + B\hat{P}E = 180°$$
$$B\hat{P}A + 140° = 180°$$
$$B\hat{P}A = 40°.$$

(b) A medida do segmento AB é igual a 5 cm, pois ABCD é um retângulo. E o segmento AB é a altura do triângulo BEP em relação ao lado PE (veja figura).



Como o segmento PE é um raio da circunferência, ele mede 8 cm e, então, a área $\mathcal{A}$ do triângulo BEP é:

$$\mathcal{A}_{\text{BEP}} = \frac{5 \times 8}{2} = 20 \text{ cm}^2.$$