II OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA - 2017

NÍVEL III - 1ª FASE - Gabarito

1. Resposta: **B**

   Solução: Visto que, até 2016, metade dos números são pares e metade ímpares, temos: $\dfrac{2016}{2} = 1008$ números pares de 1 a 2017. Dentre o trio $2, 4, 6$, o número 6 é divisível por 3. Já dentre os números $8, 10, 12$, o número 12 é divisível por 3. Dessa forma, a cada três números pares consecutivos, um é divisível por 3, logo $\dfrac{1008}{3} = 336$ números são divisíveis por 3. Portanto, há $1008 - 336 = 672$ números pares e não divisíveis por 3 entre 1 e 2017.

2. Resposta: **B**

   Solução: Por inspeção, vemos que para que a soma de quaisquer dois círculos conectados dê 818, todos os círculos devem ter o mesmo número. Assim, como $\frac{818}{2} = 409$, preenchemos todos os círculos com 409, inclusive o círculo E.

3. Resposta: **A**

   Solução: O dia 2 de março de dois anos consecutivos foram sexta-feira e domingo. Pela diferença de dois dias entre a sexta-feira e o domingo, vemos que o Ano 2 foi bissexto. Como neste Ano 2 o dia 1° de março foi em um sábado e $29 = 4 \cdot 7 + 1$, o dia 1° de fevereiro foi em um dia a menos da semana, ou seja, uma sexta-feira. De forma parecida, como $31 = 4 \cdot 7 + 3$, o dia 1° de janeiro foi em três dias a menos na semana, logo uma terça-feira. O Ano 1 teve 365 dias e, como $365 = 52 \cdot 7 + 1$, seu dia 1° de janeiro foi em um dia da semana a menos que o do ano seguinte, isto é, uma segunda-feira.

4. Resposta: **D**

   Solução: A base maior do trapézio mede $3 + 8 + 3 = 14$. A área total do trapézio é: $A_{trap} = \dfrac{(14+8)4}{2} = 44$. A área do triângulo cinza é igual a: $A_{cinza} = \dfrac{8 \times 4}{2} = 16$. Assim, a área branca da figura do lado direito é igual a: $A_{trap} - A_{cinza} = 44 - 16 = 28$.

5. Resposta: **C**

   Solução: O número $x-3$ é divisível por 7, pois x e 3 são $7-relacionados$. Então, $x - 3 = 7k$, para algum k inteiro. Analogamente, como y e 4 são $7 - relacionados$, concluímos que $y - 4 = 7q$ para algum $q \in \mathbb{Z}$. Assim,

   $$x + y = 7k + 3 + 7q + 4 = 7(k + q + 1)\ .$$

   Desta maneira, podemos afirmar que $x+y$ e 0 são $7-relacionados$, pois $x+y-0$ é divisível por 7.

6. Resposta: **A**

   Solução: O segmento CD tem comprimento igual à soma do comprimento total de todas as alturas de 20 cm dos degraus. E o segmento CE tem comprimento igual à soma total de todas os comprimentos de 40 cm dos degraus. Assim, o comprimento do segmento CD é igual a $7 \times 20 = 140$ cm e do segmento CE é igual a $7 \times 40 = 280$ cm. Como $\overline{AC}$ é igual à metade de $\overline{CD}$ e $\overline{CB}$ é igual à metade de $\overline{CE}$, temos que $\overline{AC} = 70$ cm e $\overline{CB} = 140$ cm. Para calcular o comprimento de $\overline{AB}$, basta utilizarmos o Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
\overline{AB}^2 &= 70^2 + 140^2 \\
\overline{AB}^2 &= 4900 + 19600 \\
\overline{AB}^2 &= 24500 \\
\overline{AB} &= \sqrt{24500} \\
\overline{AB} &= 70\sqrt{5} \ \text{ cm.}
\end{aligned}$$

   Portanto, o perímetro do triângulo ABC é igual a $70\sqrt{5} + 140 + 70 = 210 + 70\sqrt{5}$ cm.

7. Resposta: **C**

   Solução: Para calcularmos o valor da área da faixa laranja do arco-íris, basta subtrairmos o valor da área da menor semicircunferência que contém a faixa laranja pelo valor da área da maior semicircunferência que não contém a faixa laranja. A maior semicircunferência de todas possui diâmetro igual a 20 m, que equivale ao comprimento total do muro. Seu raio será então 10 m. Para encontrarmos o raio da menor semicircunferência que contém a faixa laranja, basta subtrairmos 1 m do comprimento do raio da maior semicircunferência de todas, pois entre elas existe apenas uma faixa de 1 m de comprimento. Portanto, o comprimento do raio desejado é igual a 9 m. A área desta semicircunferência é: $A = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi 9^2}{2} = \frac{81\pi}{2}$ m^2. Subtraindo mais 1 m do raio desta semicircunferência encontramos o raio da maior semicircunferência que não contém a faixa laranja. Assim, o raio desejado possui 8 m. A área desta semicircunferência é: $A = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi 8^2}{2} = 32\pi$ m^2. Subtraindo as duas áreas, encontramos a área da faixa laranja:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{81\pi}{2} - 32\pi \\
A &= \frac{17\pi}{2} \ \text{m}^2.
\end{aligned}$$

8. Resposta: **D**

   Solução: Augusto possui os caracteres A, R, 2 para fazer sua senha de 5 dígitos. Para cada um dos dígitos Augusto possui então 3 possibilidades. Então, pelo princípio multiplicativo, temos $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$ senhas distintas.

9. Resposta: **B**

   Solução: Um número com seis dígitos, sendo eles 3 dígitos 1 e 3 dígitos 2, possui um outro número que tem exatamente os elementos trocados, ou seja, onde é 1 será 2 e onde é 2 será

1. Assim, a soma destes 2 números será 333.333, pois em todas as ordens numéricas teremos a soma $1 + 2$. Portanto, para descobrirmos a soma de todos os possíveis números formados dessa maneira, devemos encontrar quantos eles são. Permutando os dígitos, encontramos 6! possíveis números. Porém, como há 3 dígitos iguais a 1 devemos dividir por 3!. E, analogamente, como há 3 dígitos iguais a 2 devemos dividir mais uma vez por 3!. Então, há $\frac{6!}{3!3!} = 20$ números com seis dígitos, sendo eles 3 dígitos 1 e 3 dígitos 2. E, como vimos, a soma de cada par com elementos trocados resulta em 333.333. Como são 10 pares, a soma de todos esses números é $333.333 \times 10 = 3.333.330$.

10. Resposta: **A**

Solução: Um número inteiro x possui decomposição em fatores primos como

${p_1}^{e_1} \times {p_2}^{e_2} \times \cdots \times {p_n}^{e_n}$ sendo $p_1, p_2, \cdots, p_n$ números primos. A quantidade de divisores de x é igual a: $(e_1 + 1) \times (e_2 + 1) \times \cdots \times (e_n + 1)$. Como buscamos por números inteiros que tenham exatamente 14 divisores, temos: $(e_1 + 1) \times (e_2 + 1) \times \cdots \times (e_n + 1) = 14$. O número 14 é decomposto em fatores primos como 2×7, então não é possível que o número x tenha mais do que 2 fatores primos. Assim:

$$(e_1 + 1) \times (e_2 + 1) = 2 \times 7.$$

Há duas soluções para essa equação. A primeira:

$$(e_1 + 1) = 1$$

$$(e_2 + 1) = 14.$$

Isto implica em $e_1 = 0$ e $e_2 = 13$. Mas, o menor número primo é o numero 2 e $2^{13} = 8192$, resultando em um número maior do que 2017.

A segunda solução é:

$$(e_1 + 1) = 2$$

$$(e_2 + 1) = 7.$$

Portanto, $e_1 = 1$ e $e_2 = 6$. Como $5^6 > 2017$ analisaremos apenas as possibilidades 2^6 e 3^6. Considere $2^6 = 64$. Do resultado da divisão $\frac{2017}{64} \approx 31,5$ vemos que qualquer número primo menor do que 31 (exceto o próprio número 2) multiplicado por 2^6 resulta em um número com 14 divisores. Como há 10 números primos entre 3 e 31 (os números 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 e 31), temos 10 números com 14 divisores. Considere por último, $3^6 = 729$. O número $3^6 \times 2 = 1458$ é menor do que 2017, mas $3^6 \times 5 = 3645$ não é. Portanto, há um total de 11 números inteiros menores que 2017 e com exatamente 14 divisores.

11. Resposta: **Anulada**

Solução: O primeiro dígito do número de telefone da empresa é necessariamente 8. Vamos analisar então os 8 dígitos seguintes. Dentre estes deve-se ter pelo menos 3 dígitos 8. Iremos contar o número total e subtrair dele a quantidade de telefones sem o dígito 8 e com 1, 2 e 3 dígitos 8. O total de possíveis números de telefone é 10^8 (são 10 possibilidades para cada um dos 8 dígitos). Já o total de números de telefone sem o dígito 8 da segunda à última posição é 9^8 (são 9 possibilidades para cada um dos 8 dígitos). Para os números com exatamente 2 dígitos 8 temos:

- 1 possibilidade para o primeiro dígito (ele deve ser igual a 8);
- 8 possíveis escolhas da posição do segundo dígito 8;
- 9 possíveis dígitos em cada uma das 7 posições restantes, resultando em 9^7 possibilidades.

Então, pelo princípio multiplicativo, há $1 \times 8 \times 9^7$ números com exatamente 2 dígitos 8. Para os números com exatamente 3 dígitos 8 temos:

- 1 possibilidade para o primeiro dígito (ele deve ser igual a 8);
- $\frac{8\times 7}{2} = 28$ possíveis escolhas das posições dos outros dois dígitos 8;
- 9 possíveis dígitos em cada uma das 6 posições restantes, resultando em 9^6 possibilidades.

Logo, pelo princípio multiplicativo, há $1 \times 28 \times 9^6$ números com exatamente 2 dígitos 8. Portanto, há $10^8 - (9^8 + 8 \times 9^7 + 28 \times 9^6)$ possíveis números com pelo menos 4 dígitos 8.

12. Resposta: **D**

Solução: Note primeiro que, por simetria, a parte da região cinza em cada quadrante é igual. Então, calcularemos o valor dessa área e multiplicaremos o resultado por 4. Considere que o centro da circunferência maior é C, o ponto de interseção de duas circunferências menores é P e seus centros são C_1 e C_2, como na figura.

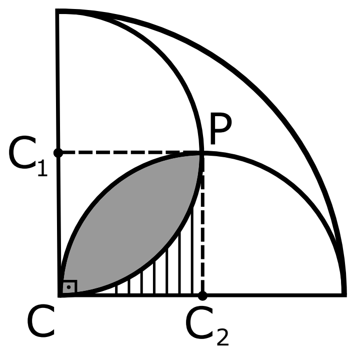

Figura 1: Questão 12.

Os segmentos C_1P, C_2P, CC_1 e CC_2 são raios das circunferências menores e medem $\frac{1}{2}$. Como esses segmentos são iguais e o ângulo $C_1\hat{C}C_2$ é reto (pois, os diâmetros mostrados na figura são ortogonais), o quadrilátero CC_1PC_2 é um quadrado. Assim, área do setor C_1CP é $\frac{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4} = \frac{\pi}{16}$. Seja S a área da região hachurada da figura. Ela é igual à área do quadrado CC_1PC_2 menos a área do setor C_1CP: $S = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{16} = \frac{4-\pi}{16}$. O quadrado CC_1PC_2 é formado por duas regiões de área S e a região cinza. Portanto:

$$A_{CC_1PC_2} = A_{cinza} + 2S$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = A_{cinza} + 2\left(\frac{4-\pi}{16}\right)$$
$$A_{cinza} = \frac{\pi - 2}{8}.$$

Assim, a área da região cinza total é $4\left(\dfrac{\pi-2}{8}\right)=\dfrac{\pi}{2}-1$.

13. Resposta: **D**

Solução: É possível observar uma regularidade no último algarismo das potências de números com o algarismo das unidades igual a 9 e igual a 7. As potências de números com o algarismo das unidades igual a 9, terminam ou em 1 (se o expoente é par) ou em 9 (se o expoente é ímpar). Assim, o último algarismo de 1989^{2017} é 9. As potências de números com o algarismo das unidades igual a 7, seguem um ciclo de modo que terminam em 7, 9, 3 ou 1. Portanto, este ciclo se repete de quatro em quatro. Assim, o número 2017 (ou qualquer outro terminado em 7) elevado a um múltiplo de 4 termina em 1. Como $1989 = 4\times 497+1$, concluímos que 2017^{1988} termina em 1 e 2017^{1989} termina em 7. Portanto, a soma do último algarismo de 1989^{2017} e de 2017^{1989} é: $9+7=16$.

14. Resposta: **C**

Solução: Note que o número $700n$ pode ser escrito como $7\times 2^2\times 5^2\times n$. Então, ele possui pelo menos os números 2, 5 e 7 como fatores primos. Para um número n ser bacana todos os divisores primos de $700n$ devem ser divisores de n. Assim, n possui os números 2, 5 e 7 como divisores, ou seja, $n=2\times 5\times 7\times k=70k$ para algum k inteiro. Todo fator primo de k é fator primo de $700n$. Logo, os números bacanas são os múltiplos de 70. Como $\frac{2017}{70}\approx 28,8$, há 28 números bacanas entre 1 e 2017.

15. Resposta: **C**

Solução: As operações podem ser feitas, de maneira menos trabalhosa, fatorando alguns termos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+96\sqrt{1+97\sqrt{1+98\times 100}}} &= \sqrt{1+96\sqrt{1+97\sqrt{1+2\times 98+98\times 98}}}\\
&= \sqrt{1+96\sqrt{1+97\sqrt{(1+98)^2}}}\\
&= \sqrt{1+96\sqrt{1+97\sqrt{(99)^2}}}\\
&= \sqrt{1+96\sqrt{1+97\times 99}}\\
&= \sqrt{1+96\sqrt{1+2\times 97+97\times 97}}\\
&= \sqrt{1+96\sqrt{(1+97)^2}}\\
&= \sqrt{1+96\sqrt{(98)^2}}\\
&= \sqrt{1+96\times 98}\\
&= \sqrt{1+2\times 96+96\times 96}\\
&= \sqrt{(1+96)^2}\\
&= \sqrt{(97)^2}\\
&= 97\ .
\end{aligned}$$