II OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA - 2017

NÍVEL II - 1ª FASE - Gabarito

1. Resposta: **D**

   Solução: A caixa 3 já contém couve, logo a informação falsa da caixa 1 é a respeito da couve. A caixa 1 tem brigadeiro, logo não possui cenoura, portanto tem brócolis. A caixa 3 não tem bombom, portanto tem bala. Assim, sobram cenoura e bombom para a caixa 2.

   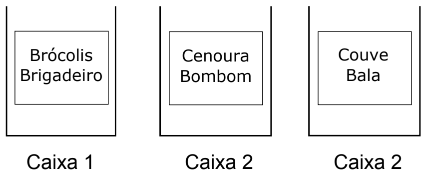

   Figura 1: Questão 1.

2. Resposta: **B**

   Solução: Visto que, até 2016, metade dos números são pares e metade ímpares, temos: $\frac{2016}{2} = 1008$ números pares de 1 a 2017. Dentre o trio $2, 4, 6$, o número 6 é divisível por 3. Já dentre os números $8, 10, 12$, o número 12 é divisível por 3. Dessa forma, a cada três números pares consecutivos, um é divisível por 3, logo $\frac{1008}{3} = 336$ números são divisíveis por 3. Portanto, há $1008 - 336 = 672$ números pares e não divisíveis por 3 entre 1 e 2017.

3. Resposta: **D**

   Solução: A hora mais próxima de 9 horas e que tem a possibilidade de igualar os dígitos é 11 horas, dessa forma temos que encontrar quantos segundos há de $9:41:32$ a $11:11:11$. Entre esses dois horários passaram 1 hora, 29 minutos e 39 segundos. Convertendo para segundos: $1 \times 60 \times 60 + 29 \times 60 + 39 = 5379$ segundos.

4. Resposta: **D**

   Solução: A base maior do trapézio mede $3 + 8 + 3 = 14$. A área total do trapézio é: $A_{trap} = \frac{(14+8)4}{2} = 44$. A área do triângulo cinza é igual a: $A_{cinza} = \frac{8 \times 4}{2} = 16$. Assim, a área branca da figura do lado direito é igual a: $A_{trap} - A_{cinza} = 44 - 16 = 28$.

5. Resposta: **C**

   Solução: O número $x-3$ é divisível por 7, pois x e 3 são $7-$*relacionados*. Então, $x-3 = 7k$, para algum k inteiro. Analogamente, como y e 4 são $7-$*relacionados*, concluímos que $y - 4 = 7q$ para algum $q \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$x + y = 7k + 3 + 7q + 4 = 7(k + q + 1)\ .$$

Desta maneira, podemos afirmar que $x+y$ e 0 são $7-relacionados$, pois $x+y-0$ é divisível por 7.

6. Resposta: **B**

   Solução: Por inspeção, vemos que para que a soma de quaisquer dois círculos conectados dê 818, todos os círculos devem ter o mesmo número. Assim, como $\frac{818}{2}=409$, preenchemos todos os círculos com 409, inclusive o círculo E.

7. Resposta: **B**

   Solução: Encontrando DY :

$$\frac{AD \cdot DY}{2}=\frac{2}{3} \Rightarrow 1 \cdot DY=\frac{4}{3} \Rightarrow DY=\frac{4}{3}.$$

   Encontrando CY, lembrando que $DC=AB=2$:

$$CY=DC-DY \Rightarrow CY=2-\frac{4}{3} \Rightarrow CY=\frac{2}{3}.$$

   Encontrando CX :

$$\frac{CY \cdot CX}{2}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3} \cdot CX}{2}=\frac{1}{4} \Rightarrow CX=\frac{3}{4}.$$

   Por fim, encontramos BX, lembrando que $CB=DA=1$:

$$CB-CX=BX \Rightarrow 1-\frac{3}{4}=BX \Rightarrow BX=\frac{1}{4}.$$

8. Resposta: **A**

   Solução: Sejam x o número de notas de R\$ 2,00 e y o número de notas de R\$ 5,00 usadas para pagar a conta. Então, $2x+5y=97$. Note que, como x e y são números inteiros, y deve ser ímpar (pois, caso contrário, o número do lado esquerdo da equação seria par). Mas, y deve ser menor do que 20, pois, caso contrário, o lado esquerdo da equação seria maior do que 97. Assim, y pode assumir qualquer valor ímpar entre 1 e 19. Portanto, y pode assumir 10 valores. E, uma vez que o valor de y é determinado, o valor de x está definido. Logo, Wellington pode pagar a conta de 10 formas distintas usando notas de R\$ 2,00 e R\$ 5,00.

9. Resposta: **D**

   Solução: A figura mais à esquerda mostra 2 possíveis maneiras de ganhar o jogo. Como são 4 vértices, há $2 \times 4=8$ maneiras desse tipo. A segunda figura mostra outras 2 maneiras de ganhar. Novamente, como são 4 vértices, há $2 \times 4=8$ maneiras desse outro tipo. Já a terceira e a quarta figura mostram (cada uma) 4 maneiras distintas de ganhar o jogo. Assim, no total há $8+8+4+4=24$ modos distintos de ganhar o Jogo da Nova.

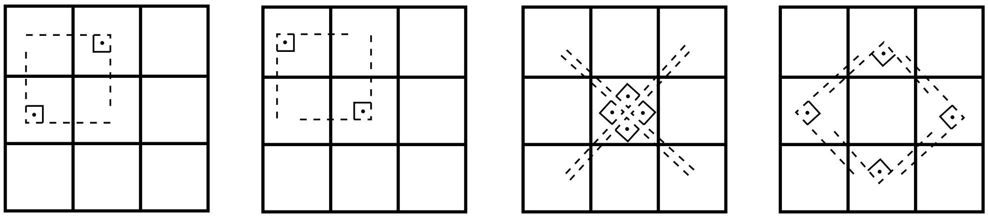

Figura 2: Questão 9.

10. Resposta: **D**

    Solução: Augusto possui os caracteres A, R, 2 para fazer sua senha de 5 dígitos. Para cada um dos dígitos Augusto possui então 3 possibilidades. Então, pelo princípio multiplicativo, temos $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$ senhas distintas.

11. Resposta: **C**

    Solução: Primeiro note que independente do resultado da partida (empate ou vitória de um dos times) sempre são distribuídos 3 pontos por partida. Se o campeonato contou com 4 times e todos jogaram contra todos uma única vez houve $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ partidas. Assim, foram distribuídos $3 \times 6 = 18$ pontos no total. Se o time A fez 7 pontos, o time B fez 4 pontos e o time C fez 2 pontos, então o time D fez $18 - (7 + 4 + 2) = 5$ pontos.

12. Resposta: **C**

    Solução: Giovanna deve obrigatoriamente passar pela porta 1. Se ela escolher a porta 2 ela pode seguir os trajetos 1-2-4-11; 1-2-5-9-10; 1-2-5-6-7-8-9-10; e 1-2-5-8-7-6-9-10. Se ela escolher a porta 3, ela terá 2 portas para escolher (portas 6 e 7) e independente dessa escolha ela terá outras 2 portas para escolher (portas 5 e 9). Passando pela porta 5 ou 9 só há um possível caminho até B. Portanto, há $2 \times 2 \times 1 = 4$ caminhos passando pela porta 3 (a saber: 1-3-6-9-10; 1-3-6-5-4-11; 1-3-7-8-9-10; e 1-3-7-8-5-4-11). Logo, há 8 caminhos distintos para Giovanna ir de A a B passando, no máximo, uma vez por cada porta.

13. Resposta: **D**

    Solução: É possível observar uma regularidade no último algarismo das potências de números com o algarismo das unidades igual a 9 e igual a 7. As potências de números com o algarismo das unidades igual a 9, terminam ou em 1 (se o expoente é par) ou em 9 (se o expoente é ímpar). Assim, o último algarismo de 1989^{2017} é 9. As potências de números com o algarismo das unidades igual a 7, seguem um ciclo de modo que terminam em 7, 9, 3 ou 1. Portanto, este ciclo se repete de quatro em quatro. Assim, o número 2017 (ou qualquer outro terminado em 7) elevado a um múltiplo de 4 termina em 1. Como $1989 = 4 \times 497 + 1$, concluímos que 2017^{1988} termina em 1 e 2017^{1989} termina em 7. Portanto, a soma do último algarismo de 1989^{2017} e de 2017^{1989} é: $9 + 7 = 16$.

14. Resposta: **A**

    Solução: Para conseguir o maior alcance possível, Antonio deve ficar na ponta do barranco, como mostra a figura. Nessa situação, o valor x indicado na figura é a maior distância que o peixe deve estar do barranco para que Antonio consiga pescá-lo.

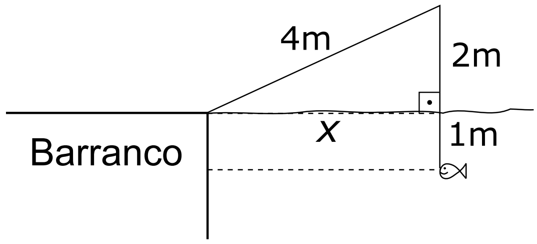

Figura 3: Questão 14.

Usando o Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} 4^2 &= 2^2 + x^2 \\ 16 &= 4 + x^2 \\ x &= 2\sqrt{3} \text{ m.} \end{aligned}$$

15. Resposta: **C**

Solução: O segmento DE mede $\frac{1}{2}$, pois é um raio da circunferência de centro D. Então, o segmento AE mede $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

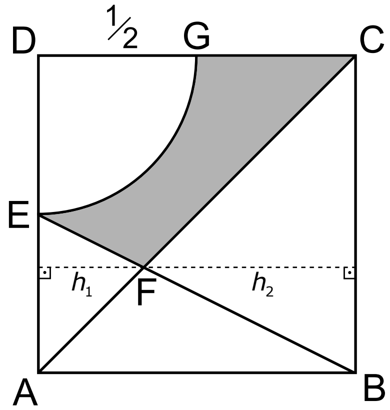

Figura 4: Questão 15.

Os triângulos AEF e CBF são semelhantes (os ângulos E$\hat{\text{F}}$A e C$\hat{\text{F}}$B são opostos pelo vértice e os ângulos E$\hat{\text{A}}$F e B$\hat{\text{C}}$F são alternos internos). Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\text{CB}}{\text{AE}} &= \frac{h_2}{h_1} \\ \frac{1}{\frac{1}{2}} &= \frac{h_2}{h_1} \\ h_2 &= 2h_1. \end{aligned}$$

Também temos que $h_1 + h_2 = \text{AB}$. Então:

$$\begin{aligned} h_1 + h_2 &= 1 \\ h_1 + 2h_1 &= 1 \\ h_1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Assim, a área do triângulo AEF é: $A_{\triangle \text{AEF}} = \dfrac{\text{AE} \times h_1}{2} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{2} = \dfrac{1}{12}$. Já a área do triângulo ABC é: $A_{\triangle \text{ABC}} = \frac{\text{AB} \times \text{BC}}{2} = \dfrac{1 \times 1}{2} = \dfrac{1}{2}$. Assim a área cinza da figura é:

$$\begin{aligned}
A_{cinza} &= A_{quadrado} - A_{\triangle \text{AEF}} - A_{\triangle \text{ABC}} - A_{setor\ \text{DEG}} \\
A_{cinza} &= 1 \times 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{2} - \frac{\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2}{4} \\
A_{cinza} &= \frac{20 - 3\pi}{48}.
\end{aligned}$$