II OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA - 2017

NÍVEL I - 1ª FASE - Gabarito

1. Resposta: **A**

   Solução: Em sua brincadeira, Pedro descartou as pedras com números pares, múltiplos de 3 e primos de 0 a 16. Sobra, portanto, apenas a pedra representada pelo número 1.

2. Resposta: **D**

   Solução: Visto que o zero é o único número que, quando somado com ele mesmo, resulta em zero, percebemos que $C = 0$. Comparando o resto da soma, podemos observar que A vale 9 e B vale 1, uma vez que devemos respeitar as equações $B + A = 10$ e $1 + B + A = BB$.

3. Resposta: **D**

   Solução: A caixa 3 já contém couve, logo a informação falsa da caixa 1 é a respeito da couve. A caixa 1 tem brigadeiro, logo não possui cenoura, portanto tem brócolis. A caixa 3 não tem bombom, portanto tem bala. Assim, sobram cenoura e bombom para a caixa 2.

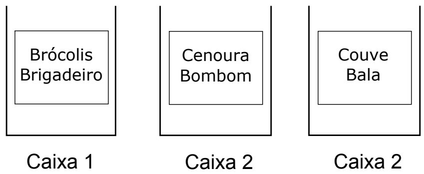

Figura 1: Questão 3.

4. Resposta: **D**

   Solução: Os caminhos possíveis são: e-f, a-c, a-d, b-c e b-d (veja figura). No total, há 5 maneiras distintas para Andréia ir da casa 1 para a casa 4 utilizando 2 estradas.

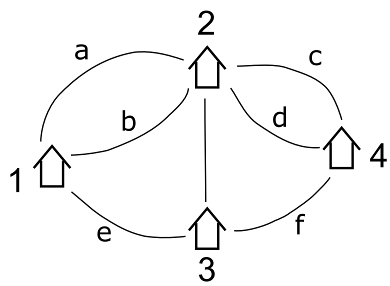

Figura 2: Questão 4.

5. Resposta: **D**

   Solução: A hora mais próxima de 9 horas e que tem a possibilidade de igualar os dígitos é 11 horas, dessa forma temos que encontrar quantos segundos há de $9:41:32$ a $11:11:11$. Entre esses dois horários passaram 1 hora, 29 minutos e 39 segundos. Convertendo para segundos: $1 \times 60 \times 60 + 29 \times 60 + 39 = 5379$ segundos.

6. Resposta: **C**

   Solução 1: Como ABCD é um paralelogramo, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos. Assim, os ângulos $A\hat{X}D$ e $C\hat{D}X$ são alternos internos e, portanto, $A\hat{X}D = 60°$.

   Solução 2: Como ABCD é um paralelogramo, o ângulo $A\hat{D}C$ possui mesma medida do ângulo $A\hat{B}C$. Assim, $A\hat{D}X = 100° - 60° = 40°$ e, pelo fato da soma de todos os ângulos internos de um paralelogramo ser igual a $360°$, temos

$$100° + 100° + \hat{A} + \hat{C} = 360° \Rightarrow$$

$$\hat{A} + \hat{C} = 160° \Rightarrow \hat{A} = \frac{160°}{2} \Rightarrow \hat{A} = 80° = \hat{C}.$$

   Tendo em vista o triângulo AXD, temos:

$$X\hat{A}D + A\hat{X}D + A\hat{D}X = 180° \Rightarrow 80° + 40° + A\hat{X}D = 180° \Rightarrow A\hat{X}D = 180° - 120° = 60°.$$

7. Resposta: **B**

   Solução: Visto que, até 2016, metade dos números são pares e metade ímpares, temos: $\frac{2016}{2} = 1008$ números pares de 1 a 2017. Dentre o trio $2, 4, 6$, o número 6 é divisível por 3. Já dentre os números $8, 10, 12$, o número 12 é divisível por 3. Dessa forma, a cada três números pares consecutivos, um é divisível por 3, logo $\frac{1008}{3} = 336$ números são divisíveis por 3. Portanto, há $1008 - 336 = 672$ números pares e não divisíveis por 3 entre 1 e 2017.

8. Resposta: **D**

   Solução: A base maior do trapézio mede $3 + 8 + 3 = 14$. A área total do trapézio é: $A_{trap} = \frac{(14+8)4}{2} = 44$. A área do triângulo cinza é igual a: $A_{cinza} = \frac{8 \times 4}{2} = 16$. Assim, a área branca da figura do lado direito é igual a: $A_{trap} - A_{cinza} = 44 - 16 = 28$.

9. Resposta: **A**

   Solução: O dia 2 de março de dois anos consecutivos foram sexta-feira e domingo. Pela diferença de dois dias entre a sexta-feira e o domingo, vemos que o Ano 2 foi bissexto. Como neste Ano 2 o dia 1° de março foi em um sábado e $29 = 4 \cdot 7 + 1$, o dia 1° de fevereiro foi em um dia a menos da semana, ou seja, uma sexta-feira. De forma parecida, como $31 = 4 \cdot 7 + 3$, o dia 1° de janeiro foi em três dias a menos na semana, logo uma terça-feira. O Ano 1 teve 365 dias e, como $365 = 52 \cdot 7 + 1$, seu dia 1° de janeiro foi em um dia da semana a menos que o do ano seguinte, isto é, uma segunda-feira.

10. Resposta: **D**

   Solução: Escolhendo a locomoção horizontal (poderia ser vertical) e descontando seu comprimento, o robô deve percorrer uma distância igual a $4 - 0,25 = 3,75$ m por nível. Como temos $\frac{3}{0,25} = 12$ níveis horizontais, o robô precisará percorrer $12 \cdot 3,75$ m, mais $11 \cdot 0,25$ m necessários para se deslocar verticalmente de um nível horizontal para o outro. Assim:

$$12 \cdot 3,75 + 11 \cdot 0,25 = 47,75 \text{ m}.$$

11. Resposta: **B**

   Solução: Por inspeção, vemos que para que a soma de quaisquer dois círculos conectados dê 818, todos os círculos devem ter o mesmo número. Assim, como $\frac{818}{2} = 409$, preenchemos todos os círculos com 409, inclusive o círculo E.

12. Resposta: **B**

   Solução: Encontrando DY :

$$\frac{AD \cdot DY}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 \cdot DY = \frac{4}{3} \Rightarrow DY = \frac{4}{3}.$$

   Encontrando CY, lembrando que $DC = AB = 2$:

$$CY = DC - DY \Rightarrow CY = 2 - \frac{4}{3} \Rightarrow CY = \frac{2}{3}.$$

   Encontrando CX :

$$\frac{CY \cdot CX}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3} \cdot CX}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow CX = \frac{3}{4}.$$

   Por fim, encontramos BX, lembrando que $CB = DA = 1$:

$$CB - CX = BX \Rightarrow 1 - \frac{3}{4} = BX \Rightarrow BX = \frac{1}{4}.$$

13. Resposta: **B**

   Solução: Para que o número seja palíndromo, devemos ter $a = c$. Quanto ao valor de b, não há a necessidade de que seja menor ou igual a 5; basta vermos que os números 121 e 181 são ambos palíndromos e são da forma $a.10^{2m} + b.10^m + c$ (com $m = 1$).

14. Resposta: **A**

   Solução: Suponha que o triângulo menor tenha ângulos α e β e lados de medidas a e b como na figura da esquerda. Sabemos que $\alpha + \beta = 90°$. Para formar um retângulo, a disposição dos triângulos deve ser como mostra a figura do lado direito. E, como a figura do lado direito é um retângulo, concluímos que $a = b$. A área do triângulo menor é igual a 10 cm^2, então: $\dfrac{a \cdot a}{2} = 10 \Rightarrow a = 2\sqrt{5}$. Portanto, o perímetro do retângulo é:

$$P = 3a + 3b = 3a + 3a = 6a = 6 \cdot (2\sqrt{5}) = 12\sqrt{5}.$$

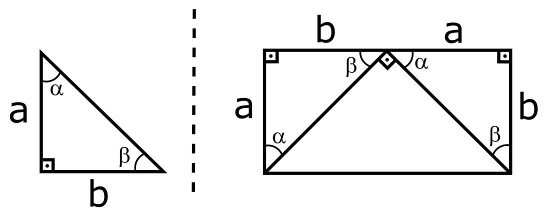

Figura 3: Questão 14.

15. Resposta: **B**

    Solução: Considere um triângulo de lados inteiros positivos iguais a a, b e c. O enunciado afirma que o perímetro é igual a 19. Assim, $a + b + c = 19$. Um lado deve ser menor do que a soma dos outros dois (desigualdade triangular). Então,

$$
\begin{aligned}
a &< b + c \\
a &< 19 - a \\
2a &< 19 \\
a &< 9,5\ .
\end{aligned}
$$

Analogamente, $b < 9,5$ e $c < 9,5$. Temos então as possibilidades distintas (lembrando que a, b e c são inteiros positivos):

- $a = 1 \Rightarrow b = 9$ e $c = 9$
- $a = 2 \Rightarrow b = 9$ e $c = 8$
- $a = 3 \Rightarrow b = 9$ e $c = 7$ ou $b = 8$ e $c = 8$
- $a = 4 \Rightarrow b = 9$ e $c = 6$ ou $b = 8$ e $c = 7$
- $a = 5 \Rightarrow b = 9$ e $c = 5$; $b = 8$ e $c = 6$ ou $b = 7$ e $c = 7$
- $a = 6 \Rightarrow b = 7$ e $c = 6$.

Portanto, há 10 triângulos distintos com perímetro igual a 19 e lados inteiros.