

# II OLIMPIÁDA LAVRENSE DE MATEMÁTICA 2017

Nível III - 2ª fase

Nome completo:	
CPF (caso tenha):	Data de nascimento:
Endereço:	
Escola:	Série:
Telefone:	Celular:
E-mail:	

## Instruções:

- Ao preencher as informações acima, use letra legível.
- Não é permitido o uso de nenhum aparelho eletrônico como, por exemplo, celular, calculadora etc.
- A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
- A duração da prova é de 3 horas.
- O tempo mínimo de permanência em sala é de 30 minutos.
- A prova tem 4 questões discursivas. Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.
- Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens (escreva o raciocínio mesmo que a solução esteja incompleta).

1. Uma partição de um conjunto  $X$  consiste em separar todos os elementos de  $X$  em subconjuntos que não possuem elementos em comum. Por exemplo, o conjunto  $Y = \{2, 3, 6, 7, 10\}$  pode ser particionado nos conjuntos  $A = \{2, 10\}$  e  $B = \{3, 6, 7\}$ . Outra partição possível de  $Y$  é nos conjuntos  $C = \{3\}$  e  $D = \{2, 6, 7, 10\}$ .

(a) Considere o conjunto  $W = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ . Particione  $W$  em dois subconjuntos  $A$  e  $B$  de modo que a soma dos elementos de  $A$  seja igual à soma dos elementos de  $B$ .

(b) Considere o conjunto  $X = \{2017, 2018, 2019, \dots, 2017 + k\}$ . Determine um valor de  $k$  ímpar, de tal forma que é possível particionar o conjunto  $X$  em dois conjuntos  $A$  e  $B$ , tal que a soma dos elementos de  $A$  é igual à soma dos elementos de  $B$ .

2. Considere a expressão

$$\frac{8x^4 + 4x^2 - 24}{4x^4 - 9}.$$

(a) Simplifique essa expressão.

(b) Qual o valor máximo dessa expressão?

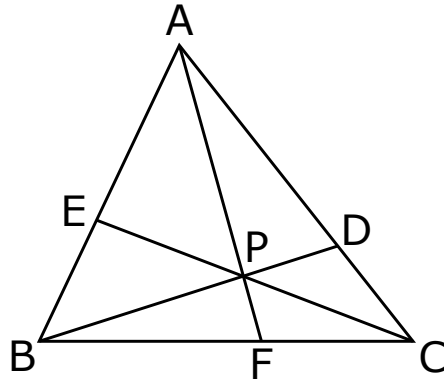
3. Uma progressão aritmética é uma sequência de números tal que um termo (a partir do segundo) é a soma do termo anterior com uma constante. A sequência de números  $1, 4, 10, 19, \dots$  tem a propriedade que a diferença entre termos consecutivos forma uma progressão aritmética.

(a) Qual o sexto termo da sequência?

(b) Encontre o termo de ordem  $n$  dessa sequência.

(c) Quantos termos nessa sequência são menores que 2017?

4. A figura mostra o triângulo ABC e sabe-se que a área do triângulo CFA é igual a 10, a área do triângulo BFP é igual a 4 e  $\text{Área}_{\triangle BFA} = \text{Área}_{\triangle CPF} + 3$ .



(a) Encontre uma relação entre as áreas dos triângulos CPF, CFA, BFP e BFA.

(b) Calcule a área do triângulo ABC.