II OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA - 2017

NÍVEL III - 2ª FASE - Gabarito

1. (a) Uma partição possível é: A={9,10,11,12} e B={13,14,15}.

   (b) Note que se k é ímpar a quantidade de elementos de X é par. Além disso, para particionar X em dois conjuntos de mesma soma, a soma dos elementos de X deve ser par. Somando o primeiro elemento de X com o último, o segundo com o penúltimo e assim por diante, encontramos:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ 2017 + 2017 + k = 2 \times 2017 + k \\ \bullet\ 2018 + 2017 + (k-1) = 2 \times 2017 + k \\ \quad \cdots \\ \bullet\ 2017 + \frac{k-1}{2} + 2017 + \frac{k+1}{2} = 2 \times 2017 + k \end{array}\right\} \frac{k+1}{2} \text{ parcelas}$$

   Assim, a soma dos elementos de X é igual a $\dfrac{k+1}{2} \times (2 \times 2017 + k)$. Como k é ímpar, o termo entre parênteses é ímpar, e, então, essa soma só será par se $k+1$ for múltiplo de 4. Assim, temos $k = 4m - 1$ com $m = 1, 2, 3, \cdots$. Com $m = 1$, temos $k = 3$: X=$\{2017, 2018, 2019, 2020\}$. E uma partição possível é:

$$\text{A} = \{2017, 2020\} \text{ e } \text{B} = \{2018, 2019\}.$$

2. (a) Uma possível simplificação:

$$\begin{aligned} \frac{8x^4 + 4x^2 - 24}{4x^4 - 9} &= \frac{8x^4 - 18 + 4x^2 - 6}{(2x^2+3)(2x^2-3)} \\ &= \frac{2(4x^4 - 9) + 2(2x^2 - 3)}{(2x^2+3)(2x^2-3)} \\ &= \frac{2(4x^4 - 9)}{(2x^2+3)(2x^2-3)} + \frac{2(2x^2 - 3)}{(2x^2+3)(2x^2-3)} \\ &= \frac{2(4x^4 - 9)}{4x^4 - 9} + \frac{2}{2x^2+3} \\ &= 2 + \frac{2}{2x^2+3} \quad . \end{aligned}$$

   (b) Pelo item anterior a expressão é equivalente a

$$2 + \frac{2}{2x^2+3} \quad .$$

   O maior valor dessa expressão é quando $2x^2 + 3$ atinge seu menor valor. Mas $2x^2 + 3$ é uma soma de termos não negativos (pois $x^2 \geq 0$) e, então seu menor valor ocorre quando $x = 0$. Logo, o maior valor da expressão é:

$$2 + \frac{2}{2 \times 0^2 + 3} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \quad .$$

3. (a) Chame a_n (com $n = 1, 2, 3, \cdots$) os termos da sequência 1, 4, 10, 19, $\cdots$. A diferença entre os termos consecutivos da sequência 1, 4, 10, 19, $\cdots$ forma a sequência 3, 6, 9, $\cdots$, que é uma progressão aritmética (sendo um termo igual ao anterior mais 3). Assim, seus termos são 3, 6, 9, 12, 15, 18, $\cdots$. Então, $a_5 = 19 + 12 = 31$ e $a_6 = 31 + 15 = 46$.

(b) Denote por b_n ($n = 1, 2, 3, \cdots$) os termos da sequência 3, 6, 9, $\cdots$. Como esta sequência é uma progressão aritmética:

$$\begin{aligned}
b_1 &= 3 \\
b_2 &= b_1 + 3 \\
b_3 &= b_2 + 3 = b_1 + 3 + 3 = b_1 + 2 \times 3 \\
b_4 &= b_3 + 3 = b_1 + 2 \times 3 + 3 = b_1 + 3 \times 3 \\
&\cdots \\
b_n &= b_1 + (n-1) \times 3 = 3 + (n-1) \times 3 = 3n \ .
\end{aligned}$$

A sequência 1, 4, 10, 19, $\cdots$ tem termos :

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= a_1 + b_1 \\
a_3 &= a_2 + b_2 = a_1 + b_1 + b_2 \\
a_4 &= a_3 + b_3 = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 \\
&\cdots \\
a_n &= a_{n-1} + b_{n-1} = a_1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} \ .
\end{aligned}$$

A soma dos elementos da sequência 3, 6, 9, $\cdots$ é:

$$\begin{aligned}
b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} &= 3 + 6 + 9 + \cdots + 3(n-1) \\
&= \frac{[3 + 3(n-1)](n-1)}{2} \\
&= \frac{3n(n-1)}{2}.
\end{aligned}$$

Então,

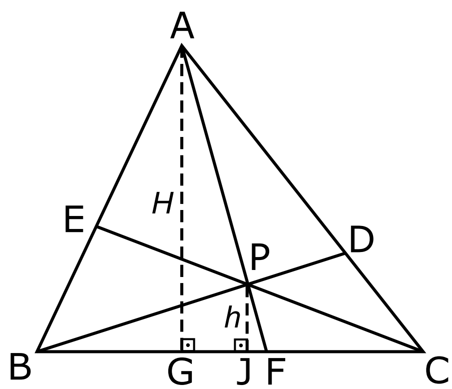
$$a_n = a_1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}$$
$$a_n = 1 + \frac{3n(n-1)}{2}$$
$$a_n = \frac{2 + 3n(n-1)}{2}.$$

(c) Pelo item anterior:

$$a_n < 2017$$
$$1 + \frac{3n(n-1)}{2} < 2017$$
$$\frac{3n(n-1)}{2} < 2016$$
$$n(n-1) < 1344.$$

O maior valor inteiro de n que satisfaz essa inequação é $n = 37$. Logo, há 37 termos na sequência menores que 2017.

4. (a) Trace os segmentos AG e PJ como na figura e faça AG $= H$, PJ $= h$, BF $= x$ e FC $= y$.



Assim, $\text{Área}_{\triangle BFA} = \dfrac{H \times x}{2}$, $\text{Área}_{\triangle BFP} = \dfrac{h \times x}{2}$, $\text{Área}_{\triangle CFA} = \dfrac{H \times y}{2}$ e $\text{Área}_{\triangle CPF} = \dfrac{h \times y}{2}$. Portanto,

$$\frac{\text{Área}_{\triangle BFA}}{\text{Área}_{\triangle BFP}} = \frac{\text{Área}_{\triangle CFA}}{\text{Área}_{\triangle CPF}}.$$

(b) Considere que $\text{Área}_{\triangle CPF} = a$. Pelo item anterior e o enunciado:

$$\frac{\text{Área}_{\triangle BFA}}{\text{Área}_{\triangle BFP}} = \frac{\text{Área}_{\triangle CFA}}{\text{Área}_{\triangle CPF}}$$

$$\frac{a+3}{4} = \frac{10}{a}$$

$$a^2 + 3a - 40 = 0$$

$$\triangle = 9 + 4 \times 40 = 169$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2} \Rightarrow a_1 = 5;\ a_2 = -8.$$

Então, $\text{Área}_{\triangle ABC} = \text{Área}_{\triangle BFA} + \text{Área}_{\triangle CFA} = (5+3) + 10 = 18.$