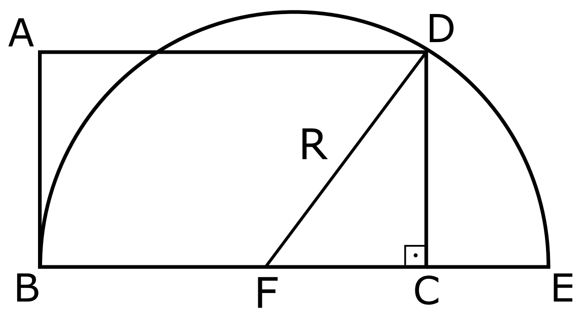
II OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA - 2017

NÍVEL II - 2ª FASE - Gabarito

1. Sejam F o centro do semicírculo e R seu raio.



Temos:

$$\begin{aligned} BC &= BF + FC \\ 15 &= R + FC \\ FC &= 15 - R \end{aligned}$$

e $DC = AB = 10$. Como o triângulo FCD é retângulo, pelo teorema de Pitágoras:

$$R^2 = 10^2 + (15 - R)^2$$

$$R^2 = 100 + 225 - 30R + R^2$$

$$R = \frac{325}{30} = \frac{65}{6}.$$

2. (a) Uma partição possível é: A={9,10,11,12} e B={13,14,15}.

   (b) Note que se k é ímpar a quantidade de elementos de X é par. Além disso, para particionar X em dois conjuntos de mesma soma, a soma dos elementos de X deve ser par. Somando o primeiro elemento de X com o último, o segundo com o penúltimo e assim por diante, encontramos:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ 2017 + 2017 + k = 2 \times 2017 + k \\ \bullet\ 2018 + 2017 + (k-1) = 2 \times 2017 + k \\ \quad \cdots \\ \bullet\ 2017 + \frac{k-1}{2} + 2017 + \frac{k+1}{2} = 2 \times 2017 + k \end{array}\right\} \frac{k+1}{2} \text{ parcelas}$$

   Assim, a soma dos elementos de X é igual a $\dfrac{k+1}{2} \times (2 \times 2017 + k)$. Como k é ímpar, o termo entre parênteses é ímpar, e, então, essa soma só será par se $k+1$ for múltiplo de 4. Assim, temos $k = 4m - 1$ com $m = 1, 2, 3, \cdots$. Com $m = 1$, temos $k = 3$: X=$\{2017, 2018, 2019, 2020\}$. E uma partição possível é:

$$\text{A} = \{2017, 2020\} \text{ e } \text{B} = \{2018, 2019\}.$$

3. Considere os inteiros a,b e c. Então:

$$N = abc \tag{1}$$
$$N = 6(a+b+c) \tag{2}$$
$$a = b+c \tag{3}$$

Observe que $a = b = c = 0$ é uma solução. Suponha que $a \neq 0$. Substituindo (3) e (1) em (2):

$$\begin{aligned} abc &= 6(a+a) \\ bc &= 12. \end{aligned}$$

Como b e c são inteiros temos as possibilidades

$$\begin{cases} b = \pm 1 \\ c = \pm 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \pm 2 \\ c = \pm 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \pm 3 \\ c = \pm 4 \end{cases}$$

Isso implica em $a = \pm 13$, $a = \pm 8$ e $a = \pm 7$, respectivamente. Assim, os valores possíveis dos inteiros são $(0, 0, 0)$; $(\pm 1, \pm 12, \pm 13)$; $(\pm 2, \pm 6, \pm 8)$ e $(\pm 3, \pm 4, \pm 7)$.

4. Primeiro observe que $\dfrac{c}{bc+1} < 1$, pois b e c são inteiros positivos e $c < bc+1$. Efetuando a divisão, temos $2017 = 106 \times 19 + 3$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{2017}{19} &= a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} \\ \frac{106 \times 19 + 3}{19} &= a + \frac{1}{\frac{bc+1}{c}} \\ 106 + \frac{3}{19} &= a + \frac{c}{bc+1} \end{aligned}$$

Como a, b e c são inteiros positivos, e como $\dfrac{c}{bc+1} < 1$, a relação implica que:

$$a = 106$$
$$c = 3k$$
$$bc + 1 = 19k$$

sendo k um inteiro positivo. As duas últimas equações implicam que $b = \dfrac{19k-1}{3k}$ que tem solução inteira apenas[1] para $k = 1$: $b = \dfrac{19 \times 1 - 1}{3 \times 1} = 6$. Portanto, os valores são $a = 106$, $b = 6$ e $c = 3$.

[1]Não era necessário que o estudante mostrasse que a única solução inteira é para $k = 1$. Bastava chegar na solução $b = 6$ e $c = 3$. Para mostrar tal fato, é só observar que $19k - 1$ não é múltiplo de k para $k \neq 1$ $(k > 0)$.