I OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA - 2018

NÍVEL II - 1ª FASE - Gabarito

1. Resposta: **C**

   Solução: O número $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times 2019$ é um múltiplo de 5, dessa forma seu último dígito pode ser 0 ou 5. Dentre as alternativas da questão não aparece uma com o número 0, então o último dígito deve ser o 5. Se tívessemos uma alternativa com o número 0, precisaríamos descartá-la. Para isso, precisaríamos lembrar que a multiplicação de dois números ímpares é sempre um número ímpar. Dessa forma, o último dígito não poderia ser zero, pois $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times 2019$ seria um número par.

   Abaixo, provamos que a multiplicação de dois números ímpares é um número ímpar:

$$\begin{aligned}(2m+1)(2n+1) &= 2m(2n+1) + 1(2n+1)\\ &= 2m(2n+1) + 2n + 1\\ &= 2(2mn + m + n) + 1,\end{aligned}$$

   sendo m e n inteiros não negativos.

2. Resposta: **A**

   Solução: Como C é um algarismo entre 0 e 9, sabemos que $C + 8$ deve ser um número inteiro entre 8 e 17. No entanto, pelo enunciado, $C + 8$ tem o último algarismo igual a 5. Logo, $C+8 = 15$, o que implica $C = 7$. Por sua vez, observando a soma dos algarismos correspondente às dezenas, temos que $1 + B + A$ pode ser igual a 9 ou a 19. Vejamos porque $1 + B + A$ não pode ser 19. De acordo com os algarismos das centenas, temos que $A + B$ é no máximo igual a 8, ou seja, $1 + B + A$ é no máximo igual a 9. Logo, concluímos que $1 + B + A = 9$, ou seja, que $A + B = 8$. Portanto, $A + B + C = 8 + 7 = 15$.

3. Resposta: **C**

   Solução: Como, em cada parada que o ônibus faz, entram 5 passageiros e saem 3, podemos afirmar que em cada parada aumenta em 2 o número de passageiros. Para atingir o total de 55 passageiros, tendo o ônibus iniciado o percurso com 15 passageiros, serão necessárias p paradas. Para calcular o valor de p, basta resolver a equação:

$$2p + 15 = 55 \Rightarrow 2p = 55 - 15 \Rightarrow p = \frac{40}{2} \Rightarrow p = 20.$$

4. Resposta: **A**

   Solução: Considerando as relações fornecidas entre os elementos do conjunto A, podemos fazer a simplificação

$$\begin{aligned}(\bigstar + \bigcirc) * \bigstar + (\bigstar * \bigcirc) * \triangle &= \triangle * \bigstar + \bigcirc * \triangle \\ &= \triangle + \triangle \\ &= \triangle.\end{aligned}$$

5. Resposta: **D**

   Solução: Vamos denotar por a, b e c as idades dos três filhos de Antônio. Sabemos que, atualmente, $a+b+c = 19$ e que Antônio tem 43 anos. Depois de 1 ano, a soma das idades dos três filhos será

$$(a+1)+(b+1)+(c+1) = a+b+c+3 = 19+3 = 22$$

   e Antônio estará com 44 anos. Depois de 2 anos, a soma das idades dos três filhos será

$$(a+2)+(b+2)+(c+2) = a+b+c+3\cdot 2 = 19+6 = 25$$

   e Antônio estará com 45 anos. Assim, a cada ano que passa, a soma das idades dos filhos aumenta em 3, enquanto a idade de Antônio aumenta em 1. Para resolver o problema, precisamos descobrir o valor de n tal que

$$(a+n)+(b+n)+(c+n) = 43+n.$$

   Como $a+b+c = 19$, temos que

$$(a+n)+(b+n)+(c+n) = 43+n \Rightarrow 19+3n = 43+n \Rightarrow 3n-n = 43-19 \Rightarrow 2n = 24 \Rightarrow n = 12.$$

   Logo, daqui a 12 anos, Antônio terá 55 anos e a soma das idades de seus três filhos também será 55.

6. Resposta: **C**

   Solução: Os números de 2 algarismos que podem ser escritos com os algarismos 1, 2 e 3 são: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33. Calculando a soma desses números chegamos ao valor 198.

7. Resposta: **B**

   Solução: De acordo com as informações temos 3 camisas (azul, verde, vermelha) e 4 bermudas (azul, preta, verde, rosa).

   camisa azul: bermuda preta, verde ou rosa (3 opções)

   camisa verde: bermuda azul, preta ou rosa (3 opções)

camisa vermelha: bermuda azul, preta, verde ou rosa (4 opções)

Portanto, Márcio poderá se vestir de $3 + 3 + 4 = 10$ maneiras diferentes, sendo as cores da camisa e bermuda diferentes.

8. Resposta: **B**

   Solução: Como a quantidade de placas com o algarismo 2 é menor (23 placas), vamos começar com ela. Vejamos a tabela:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 placa
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1 placa
20	21	22	23						29	11 placas
30	31	32	33						39	1 placa
40									49	1 placa
50									59	1 placa
60									69	1 placa
70									79	1 placa
80									89	1 placa
90	91	92	93						99	1 placa
100	101	102	103						109	1 placa
110	111	112	113						119	1 placa
									Total	22 placas

   Para escrever os números de 1 a 99 são necessárias 20 placas com o algarismo 2. Na verdade, são necessárias 20 placas de qualquer algarismo de 1 a 9, e 10 placas do algarismo 0 para escrever os números de 1 a 99.

   De 110 a 119, mais 2 placas com o algarismo 2 não utilizadas. Portanto, de 1 a 119, são necessárias 22 placas. Como temos 23 placas, podemos escrever os números de 1 a 120.

   Por sua vez, o algarismo 1 é muito utilizado na escrita dos números de 100 a 119. De 100 a 109 são necessárias 11 placas e, de 110 a 119, 21 placas. Portanto, para escrever os números de 1 a 119, são utilizadas $20 + 11 + 21 = 52$ placas com o algarismo 1. Como temos somente 50 placas, o último número que pode ser escrito é o 118 e, consequentemente, esse será o número de estudantes que poderão participar da corrida.

9. Resposta: **D**

   Solução: Vamos calcular a média aritmética de pontos por partida de cada jogador, isto é, somar todos os pontos e dividir pela quantidade de partidas que cada um jogou. Como Arthur e Lucas jogaram 5 partidas, iremos dividir a soma dos pontos de cada um por 5. Douglas e Maicon jogaram 6 partidas, então iremos dividir por 6.

Média do Arthur: $m_A = \frac{18+18+19+20+15}{5} = \frac{90}{5} = 18$ pontos por partida;

Média do Lucas: $m_L = \frac{17+15+20+20+13}{5} = \frac{85}{5} = 17$ pontos por partida;

Média do Douglas: $m_D = \frac{18+21+15+15+17+16}{6} = \frac{102}{6} = 17$ pontos por partida;

Média do Maicon: $m_M = \frac{15+18+18+14+20+17}{6} = \frac{102}{6} = 17$ pontos por partida.

Logo, Arthur teve a melhor média de pontos por partida. Os demais jogadores tiveram a mesma média de pontos por partida.

10. Resposta: **B**

Solução: Precisamos calcular o comprimento da roda da bicicleta de Andréia. Para isso, usaremos a fórmula que nos fornece o comprimento C de uma circunferência de raio R, ou seja, a fórmula $C = 2\pi R$, sendo $\pi \approx 3,14$. Como $R = 0,2m$, temos que

$$C = 2 \times 3,14 \times 0,2 = 3,14 \times 0,4 = \frac{314}{100} \times \frac{4}{10} = \frac{1256}{1000} = 1,256m.$$

Vamos denotar por N á quantidade de voltas que a roda da bicicleta terá que dar para percorrer $7,5km = 7500m$. Então

$$7500 = N \times 1,256 \Rightarrow N = \frac{7500}{1,256}.$$

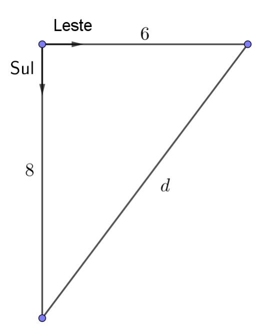
Aproximando $1,256$ por $1,25$, para facilitar a divisão, obtemos

$$\frac{7500}{1,25} = \frac{7500}{125} \times 100 = 60 \times 100 = 6000.$$

Portanto, a roda da bicicleta terá que dar aproximadamente 6000 voltas. Como cada 6 voltas da roda da bicicleta corresponde a 1 volta no pedal, concluímos que o pedal terá que dar aproximadamente 1000 voltas.

11. Resposta: **B**

Solução: Iniciando a caminhada às 10h30min e terminando às 12h30min, Nelson e Andreza terão caminhado por 2 horas. Como a velocidade de Nelson é $3km/h$, ele terá percorrido $6km$ em 2 horas. Por sua vez, Andreza caminha a $4km/h$, então ela terá percorrido $8km$ em 2 horas. Abaixo temos um esboço para mostrar a direção em que cada um caminha.



Como Nelson e Andreza caminham em direções perpendiculares, o triângulo formado pelo ponto inicial e pelos pontos finais do percurso é um triângulo retângulo. Podemos aplicar o teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow d^2 = 36 + 64 \Rightarrow d^2 = 100 \Rightarrow d = 10,$$

pois d é um valor positivo. Portanto, a distância entre Nelson e Andreza será de $10km$ depois de 2 horas de caminhada.

12. Resposta: **A**

Solução: A princípio, vamos supor que $p = 2$ e tentar encontrar algum número primo q que satisfaça a igualdade $24pq = (p + q + 7)^2$.

$$24(2)q = (2 + q + 7)^2 \Rightarrow 48q = (q + 9)^2 \Rightarrow 48q = q^2 + 18q + 81 \Rightarrow q^2 - 30q + 81 = 0.$$

Aplicando a fórmula de Báskara, $\triangle = 900 - 324 = 576$, o que implica, $q_1 = 3$ e $q_2 = 27$. Como 27 não é primo, temos apenas $q = 3$. Portanto, o par $(p, q) = (2, 3)$ satisfaz a igualdade do problema. Analogamente, se fizermos $p = 3$, encontraremos $q = 2$. Logo, também temos o par $(p, q) = (3, 2)$.

Vamos provar que não existem outros pares diferentes desses dois pares encontrados. De fato, suponha que p seja diferente de 2 e de 3 e que q seja diferente de 2 e de 3 e vamos denotar o número $p + q + 7$ por b. Além disso, vamos observar que os fatores primos que aparecem na decomposição de um número e de seu quadrado são os mesmos. Em outras palavras, os fatores primos dos números b e b^2 são os mesmos. O que difere na decomposição em fatores primos dos números b e b^2 são os expoentes dos fatores. Fatorando o número 24 temos:

$$24pq = b^2 \Rightarrow 2^3 3pq = b^2.$$

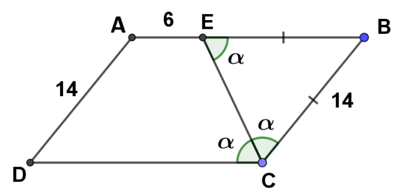
Como os fatores primos de b^2 são os primos 2, 3, p e q segue que esses também são os fatores primos de b. Assim, podemos escrever $b = 2^{r_1}3^{r_2}p^{r_3}q^{r_4}$, sendo cada expoente r_i positivo, para todo $i = 1, \cdots, 4$. Substituindo o valor de b na igualdade acima obtemos:

$$2^3 3pq = (2^{r_1}3^{r_2}p^{r_3}q^{r_4})^2 \Rightarrow 2^3 3pq = 2^{2r_1}3^{2r_2}p^{2r_3}q^{2r_4}.$$

Comparando os expoentes do 2 em ambos os lados da última igualdade chegamos a uma contradição, pois do lado esquerdo da igualdade o expoente é um número ímpar e do lado direito, o expoente do 2 é um número par. Portanto, provamos que os únicos pares de primos que satisfazem a igualdade dada são: $(2, 3)$ e $(3, 2)$.

13. Resposta: **D**

Solução: Como o paralelogramo possui lados opostos congruentes, temos que $BC = AD = 14cm$. Na figura, podemos observar que há duas retas paralelas, $\overline{CA}$ e $\overline{DC}$, cortadas por uma transversal (reta $\overleftrightarrow{CE}$). Logo, os ângulos $D\hat{C}E$ e $B\hat{E}C$ são chamados alternos internos e são congruentes. Além disso, temos a informação de que a reta $\overleftrightarrow{CE}$ é a bissetriz do ângulo $D\hat{C}B$, assim os ângulos $D\hat{C}E$ e $B\hat{C}E$ também são congruentes. Segue que os ângulos $B\hat{C}E$ e $B\hat{E}C$ são congruentes e seus respectivos lados também. Portanto, o lado $BE = 14\text{cm}$. O perímetro é $14 + 14 + 20 + 20 = 68\text{cm}$.



14. Resposta: **D**

    Solução: Vamos denotar por x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e x_6 as idades dos seis amigos que elaboraram as provas em 2016. Como a média da idades era 41, podemos escrever a igualdade

    $$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{6} = 41 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 246.$$

    Passaram-se 2 anos e um novo amigo ajudou o grupo anterior a elaborar as provas. Vamos denotar a idade desse novo amigo, em 2018, por x_7. Como a média em 2018 é 45 anos, podemos escrever a igualdade

    $$\frac{(x_1 + 2) + (x_2 + 2) + (x_3 + 2) + (x_4 + 2) + (x_5 + 2) + (x_6 + 2) + x_7}{7} = 45$$

    $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 6 \times 2 + x_7 = 45 \times 7$$

    $$x_7 = 45 \times 7 - 12 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) = 315 - 12 - 246 = 57.$$

    Logo, a idade do novo amigo é 57 anos.

15. Resposta: **A**

    Solução: Os ângulos internos do triângulo DEF medem $60°$, pois trata-se de um triângulo equilátero. Como os segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{AC}$ são paralelos e o segmento $\overline{DB}$ é perpendicular ao segmento $\overline{AC}$, podemos concluir que a reta que passa pelos pontos O, D e B é perpendicular a $\overline{EF}$. Dessa forma, o ponto de interseção dessa reta com o segmento $\overline{EF}$ será o ponto de tangência T do segmento $\overline{EF}$ com a circunferência. O segmento $\overline{TD}$ é um diâmetro da circunferência, então $TD = 18m$. Podemos calcular o lado $\overline{ED}$ do triângulo retângulo EDT, fazendo

    $$\text{sen}(60°) = \frac{DT}{ED} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{18}{ED} \Rightarrow ED = \frac{2 \times 18}{\sqrt{3}} = \frac{36\sqrt{3}}{3} = 12\sqrt{3}m.$$

    Como $OD + DB + 16 = 55m$, temos que $DB = 55 - 16 - OD = 39 - 9 = 30m$.

Agora, observemos que os ângulos $D\widehat{E}F$ e $A\widehat{C}D$ são alternos internos, o que implica afirmar que $A\widehat{C}D = 60°$. Portanto, podemos calcular o lado $\overline{DC}$ fazendo

$$\operatorname{sen}(60°) = \frac{DB}{DC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{30}{DC} \Rightarrow DC = \frac{2 \times 30}{\sqrt{3}} = \frac{60\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3}m.$$

Logo, a bola percorre $FD + DC = ED + 20\sqrt{3} = 12\sqrt{3} + 20\sqrt{3} = 32\sqrt{3}m$.