I OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA - 2018

NÍVEL I - 1ª FASE - Gabarito

1. Resposta: **B**

   Solução: Como há 5 vogais em sequência, dividimos 2018 por 5. Como resultado obtemos 403 e resto 3. Assim, temos 403 sequências com todas as vogais e a última sequência que termina na 3ª vogal, isto é, na vogal I.

2. Resposta: **B**

   Solução: Multiplicando os números iniciais do conjunto obtemos sempre um múltiplo de 5 com final 5. Como o conjunto possui apenas números ímpares, todas as multiplicações subsequentes repetem este comportamento. Logo, o último dígito da multiplicação de todos os elementos desse conjunto será 5.

3. Resposta: **C**

   Solução: Sabendo que Rafaela deve retirar pelo menos 20 bolas da mesma cor, vamos supor que ela tire inicialmente 19 bolas e todas são da cor azul. Em seguida, Rafaela retira mais 19 bolas pretas, 19 bolas verdes, 5 bolas vermelhas e 5 bolas roxas. Para garantir que ela tenha pelo menos 20 bolas da mesma cor, ela deve retirar mais 1 bola que seja azul, preta ou verde. Assim, no total Rafaela retirou 19+19+19+5+5+1=68 bolas.

4. Resposta: **C**

   Solução: Quando n é igual a 5, temos que

   $$1234\underline{5}679 \times 9 = 111.111.111$$

   Como $54 = 9 \times 6$, basta multiplicar o resultado anterior por 6. Logo, obtemos

   $$111.111.111 \times 6 = 666.666.666$$

5. Resposta: **A**

   Solução: Considerando as relações fornecidas entre os elementos do conjunto A, podemos fazer a simplificação

   $$\begin{aligned}(\bigstar + \bigcirc) * \bigstar + (\bigstar * \bigcirc) * \triangle &= \triangle * \bigstar + \bigcirc * \triangle \\ &= \triangle + \triangle \\ &= \triangle.\end{aligned}$$

6. Resposta: **D**

   Solução: Efetuando a subtração de dois em dois números, isto é, $(1-2)$, $(3-4)$, $(5-6)$, e assim por diante, obtemos sempre o resultado -1, pois cada uma destas subtrações é entre o número antecessor e seu sucessor. Como temos uma expressão com 100 números, então temos 50 pares de subtrações, todas com o mesmo resultado. Logo o resultado total da expressão é -50.

7. Resposta: **C**

   Solução: Como queremos os números de 2 algarismos que podem ser escritos usando 1, 2 ou 3, temos que considerar o número de vezes em que cada um deles é unidade e o número de vezes em que cada um é dezena. Assim, o algarismo 1 pode ser 3 vezes unidade e 3 vezes dezena. O algarismo 2 também pode ser 3 vezes unidade e 3 vezes dezena. Isso se repete para o algarismo 3. Assim, temos

   $$3 \cdot 1 + 3 \cdot 10 = 33$$

   $$3 \cdot 2 + 3 \cdot 20 = 66$$

   $$3 \cdot 3 + 3 \cdot 30 = 99$$

   o que resulta em uma soma igual a 198.

   Solução Alternativa: Neste caso, como são poucos algarismos, também podemos escrever cada um deles: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32 e 33. Efetuando a soma, obtemos 198.

8. Resposta: **C**

   Solução: O número 68 possui 6 divisores, são eles: 1, 2, 4, 17, 34 e 68.

9. Resposta: **A**

   Solução: Repare que o triângulo possui o seguinte padrão: suas lateriais são formadas pelo número 2 e os demais valores são a multiplicação entre os dois números adjacentes. Logo, os números da 5ª linha horizontal são: 2, 16, 64, 16, 2, respectivamente. O que resulta na soma igual a 100.

10. Resposta: **D**

    Solução: Primeiro, dividimos 2018 por 7 e obtemos o quociente 288 e o resto 2. Em seguida, elevamos o resto da divisão a potência 5, isto é, 2^5, e obtemos 32. Dividindo 32 por 7, obtemos o quociente 4 e o resto 4.

11. Resposta: **A**

Solução: Para descobrir o número que Fábio pensou, basta partir do resultado dado por ele e realizar o processo inverso das operações, começando pela última. Assim, começamos dividindo 84 por 4 e obtemos 21. Deste resultado, subtraímos 14 e obtemos 7, o número que Fábio pensou.

Solução Alternativa: Outra forma é resolver a seguinte equação:

$$(x + 14) \cdot 4 = 84,$$

o que resulta em $x = 7$.

12. Resposta: **B**

    Solução: Na figura podemos observar dois triângulos, um formado pela torre e sua sombra e o outro formado por Antônio e sua sombra. Estes dois triângulos são semelhantes, pois eles possuem dois lados proporcionais, isto é, os lados que representam a torre e o Antônio e os lados que representam a sombra da torre e do Antônio. Além disso, os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes, pois ambos medem 90°. Assim, usando o critério LAL de semelhança de triângulos, temos que

    $$\frac{18}{x} = \frac{0,4}{1,6}$$

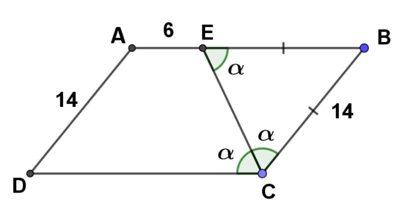
    o que resulta em $x = 72$. Portanto, a altura real da torre é $72m$.

13. Resposta: **A**

    Solução: Como Doisberto e Tresberto comeram juntos 57 jabuticabas de um total de 88, sobraram apenas 31 jabuticabas para serem divididas entre Umberto e Quatroberto. Sabemos que Umberto comeu mais jabuticabas que todos os outros. Assim, a única forma disso acontecer é Umberto ter comido 30 jabuticabas e Quatroberto apenas 1.

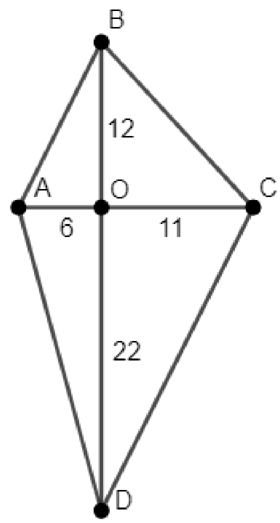
14. Resposta: **D**

    Solução: Como o paralelogramo possui lados opostos congruentes, temos que $BC = AD = 14cm$. Na figura, podemos observar que há duas retas paralelas, $\overline{CA}$ e $\overline{DC}$, cortadas por uma transversal (reta $\overleftrightarrow{CE}$). Logo, os ângulos $D\hat{C}E$ e $B\hat{E}C$ são chamados alternos internos e são congruentes. Além disso, temos a informação de que a reta $\overleftrightarrow{CE}$ é a bissetriz do ângulo $D\hat{C}B$, assim os ângulos $D\hat{C}E$ e $B\hat{C}E$ também são congruentes. Segue que os ângulos $B\hat{C}E$ e $B\hat{E}C$ são congruentes e seus respectivos lados também. Portanto, o lado $BE = 14$cm. O perímetro é $14 + 14 + 20 + 20 = 68$cm.



15. Resposta: **D**

Solução: Vamos começar descobrindo os valores da base b e da altura h dos triângulos com área conhecida. A área do triângulo ABO é $36m^2$, logo $b \cdot h$ deste triângulo é 72 e, podemos escolher $b = 6$ e $h = 12$. A área do triângulo CDO é $121m^2$, logo $b \cdot h$ deste triângulo é 242 e, de forma análoga, podemos escolher $b = 11$ e $h = 22$.



Agora, observe que:

base do $\triangle_{ABO}$= base do $\triangle_{ADO}$;

altura do $\triangle_{ABO}$= altura do $\triangle_{BCO}$;

base do $\triangle_{CDO}$= base do $\triangle_{BCO}$;

altura do $\triangle_{CDO}$= altura do $\triangle_{ADO}$.

Assim, podemos calcular as áreas dos triângulos BCO e ADO e verificamos que ambas são iguais a $66m^2$. Portanto, a área total do quadrilátero é $36 + 121 + 66 + 66 = 289m^2$.