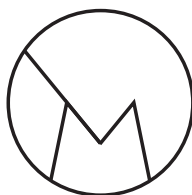


III OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA 2018

Nível III - 2ª fase



Nome completo:	
CPF (caso tenha):	Data de nascimento:
Endereço:	
Escola:	Série:
Telefone:	Celular:
E-mail:	

Instruções:

- Ao preencher as informações acima, use letra legível.
- Não é permitido o uso de nenhum aparelho eletrônico como, por exemplo, celular, calculadora etc.
- A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
- A duração da prova é de 3 horas.
- O tempo mínimo de permanência em sala é de 30 minutos.
- A prova tem 4 questões discursivas. Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.
- Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens (escreva o raciocínio mesmo que a solução esteja incompleta).

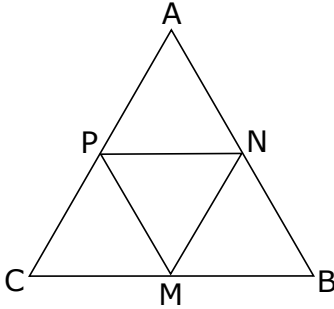
1. Os números p , q e r são primos. Encontre todos os valores possíveis de p de modo que $q^2 - r^2 = p$.

2. O famoso Pequeno Teorema de Fermat diz que se p é primo e a é um inteiro não múltiplo de p , então a^{p-1} deixa resto 1 na divisão por p .

(a) Dê dois exemplos que ilustrem a validade do Pequeno Teorema de Fermat.

(b) Calcule o resto da divisão de 3^{133} por 131.

3. Considere um triângulo equilátero ABC e sejam M , N e P os pontos médios de seus lados. Unindo estes pontos médios, dividimos o triângulo inicial em 4 outros, totalizando 5 triângulos. Repetindo-se o procedimento com o triângulo central obtemos novos triângulos e assim repetimos sucessivamente o processo.

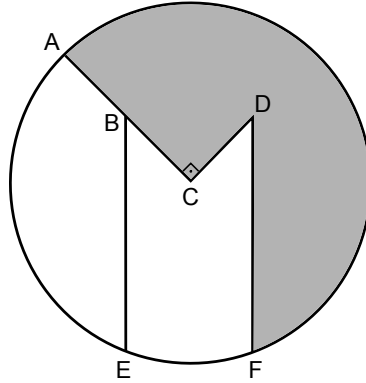


(a) Em algum momento teremos exatamente 302 triângulos?

(b) Determine o número de triângulos após n etapas.

(c) Qual é a área do triângulo central após a etapa n ?

4. A figura mostra uma circunferência de centro no ponto C e raio igual a 1. Os pontos A, B e C estão alinhados e os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CD} possuem o mesmo tamanho. Os segmentos \overline{BE} e \overline{DF} são paralelos e possuem o mesmo tamanho.



(a) Determine o comprimento do segmento \overline{BD} .

(b) Mostre que o ângulo \widehat{CDF} é igual a 45° .

(c) Calcule a área cinza da figura. (Assuma que o ângulo cujo cosseno é igual a $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ é aproximadamente 70° . A área de um setor circular cujo ângulo central, em grau, é α é igual a $\frac{\pi R^2 \alpha}{360}$ sendo R o raio da circunferência.)