III OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA - 2018

NÍVEL I - 2ª FASE - Gabarito

1. (a) $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$

   (b) Note que

$$\begin{aligned} n^n &= \underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{n \text{ fatores}} \\ n! &= \underbrace{1 \times 2 \times \cdots \times (n-1)n}_{n \text{ fatores}}. \end{aligned}$$

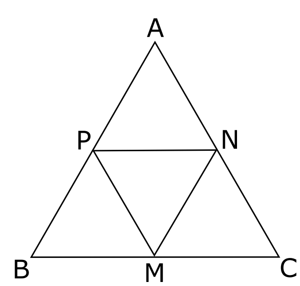
   Para um número natural n maior do que 1, sabemos que $n > 1$, $n > 2$, $\cdots n > (n-1)$. Portanto,

$$\begin{aligned} n &> 1 \\ n &> 2 \\ &\cdots \\ n &> n-1 \\ n &= n \\ \Rightarrow n \times n \times n \times \cdots \times n &> 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1)n \\ n^n &> n!\ . \end{aligned}$$

2. (a) O resultado da operação $\star$ sobre os números pares segue um ciclo. A cada três números pares consecutivos, o resultado da operação repete. A operação aplicada nos números pares múltiplos de 3 resulta sempre em 0,024. Como 24 é múltiplo de 3, concluímos que $\star 24 = 0,024$.

   (b) Pela observação do item anterior, vemos que $\star 2016 = 0,024$, pois 2016 é múltiplo de 3. Seguindo o ciclo, concluímos que $\star 2018 = 0,082$.

3. A figura mostra o triângulo descrito pelo enunciado.



Como o triângulo ABC é equilátero seus ângulos medem $60°$. Se os pontos P e M são pontos médios, os segmentos $\overline{BP}$ e $\overline{BM}$ possuem mesma medida. Assim, o triângulo BPM é isósceles e, como um de seus ângulos mede $60°$, ele é equilátero. De maneira análoga, concluímos que os triângulos APN e NCM são equiláteros. Por consequência, o triângulo PMN também é equilátero e seus lados medem $\frac{3}{2}$ cm. Então, pela fórmula do enunciado, a área do triângulo PMN é igual a $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{16}$.

4. (a) Os números 3-suaves possuem fatores primos iguais a 2 e 3. Portanto, um número n é 3-suave se ele é da forma $n = 2^x 3^y$ com x e y sendo números inteiros positivos. Assim, os números 3-suaves menores ou iguais a 20 são:

$$
\begin{aligned}
2^1 \cdot 3^0 &= 2 \\
2^2 \cdot 3^0 &= 4 \\
2^3 \cdot 3^0 &= 8 \\
2^4 \cdot 3^0 &= 16 \\
2^0 \cdot 3^1 &= 3 \\
2^1 \cdot 3^1 &= 6 \\
2^2 \cdot 3^1 &= 12 \\
2^0 \cdot 3^2 &= 9 \\
2^1 \cdot 3^2 &= 18.
\end{aligned}
$$

(b) Os números 5-suaves possuem fatores primos iguais a 2, 3 e 5, ou seja, eles são da forma $n = 2^x 3^y 5^z$ sendo x, y e z números inteiros positivos. Para que esses números sejam menores do que 2018 os expoentes estão limitados aos conjuntos: $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $z \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, pois $2^{11} = 2048$, $3^7 = 2187$ e $5^5 = 3125$, respectivamente. A tabela apresenta as possíveis combinações desses expoentes de modo que o número $n = 2^x 3^y 5^z$ seja menor do que 2018.

Valor de z	Valor de y	Valor de x	Quantidade de possibilidades
0	0	$x \in \{1, 2, \cdots, 10\}$	10
	1	$x \in \{0, 1, \cdots, 9\}$	10
	2	$x \in \{0, 1, \cdots, 7\}$	8
	3	$x \in \{0, 1, \cdots, 6\}$	7
	4	$x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$	5
	5	$x \in \{0, 1, 2, 3\}$	4
	6	$x \in \{0, 1, 2\}$	3
1	0	$x \in \{0, 1, \cdots, 8\}$	9
	1	$x \in \{0, 1, \cdots, 7\}$	8
	2	$x \in \{0, 1, \cdots, 5\}$	6
	3	$x \in \{0, 1, 2, 3\}$	4
	4	$x \in \{0, 1, 2\}$	3
	5	$x \in \{0\}$	1
2	0	$x \in \{0, 1, \cdots, 6\}$	7
	1	$x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$	5
	2	$x \in \{0, 1, 2, 3\}$	4
	3	$x \in \{0, 1\}$	2
3	0	$x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$	5
	1	$x \in \{0, 1, 2\}$	3
	2	$x \in \{0\}$	1
4	0	$x \in \{0, 1\}$	2
	1	$x \in \{0\}$	1

Somando as possibilidades da última coluna encontramos 108 números 5-suaves menores do que 2018.