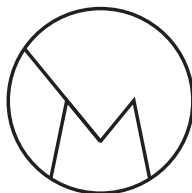


# IV OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA 2019

Nível I - 2ª fase

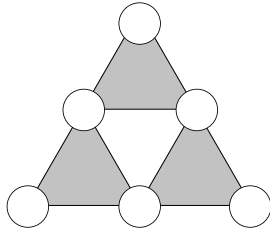


Nome completo:	
CPF (caso tenha):	Data de nascimento:
Endereço:	
Escola:	Série:
Telefone:	Celular:
E-mail:	

## Instruções:

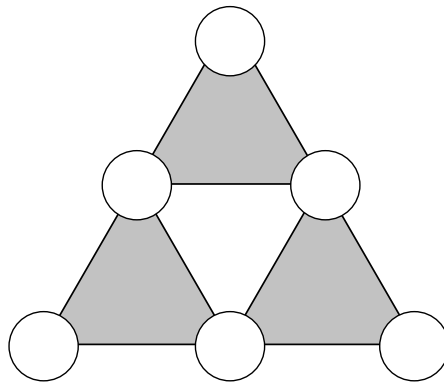
- Ao preencher as informações acima, use letra legível.
- Não é permitido o uso de nenhum aparelho eletrônico como, por exemplo, celular, calculadora etc.
- A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
- A duração da prova é de 3 horas.
- O tempo mínimo de permanência em sala é de 30 minutos.
- A prova tem 4 questões discursivas. Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.
- Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens (escreva o raciocínio mesmo que a solução esteja incompleta).

1. Os círculos da figura devem ser preenchidos com os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6, de forma que a soma dos números colocados nos vértices de cada triângulo cinza sejam iguais.



(a) Qual deve ser o valor da soma dos vértices de um triângulo cinza?

(b) Preencha os círculos da figura com os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6, de forma que a soma dos números colocados nos vértices de cada triângulo cinza sejam iguais.



2. Camilla inventou suas próprias operações entre dois números inteiros e usou os símbolos  $\oplus$  e  $\otimes$  para designá-las. As operações de Camilla funcionam assim para dois números inteiros  $a$  e  $b$ :

- $a \oplus b = 0$  se a soma usual  $a + b$  resulta em um múltiplo de 3;
- $a \oplus b = 1$  se a soma usual  $a + b$  resulta em um múltiplo de 3 somado de 1 unidade;
- $a \oplus b = 2$  se a soma usual  $a + b$  resulta em um múltiplo de 3 somado de 2 unidades;
- $a \otimes b = 0$  se o produto usual  $a \times b$  resulta em um múltiplo de 3;
- $a \otimes b = 1$  se o produto usual  $a \times b$  resulta em um múltiplo de 3 somado de 1 unidade;
- $a \otimes b = 2$  se o produto usual  $a \times b$  resulta em um múltiplo de 3 somado de 2 unidades.

Por exemplo,  $8 \oplus 2 = 1$ , pois a soma usual  $8 + 2 = 10 = 9 + 1$  e  $6 \otimes 3 = 0$ , pois  $6 \times 3 = 18$  e 18 é múltiplo de 3.

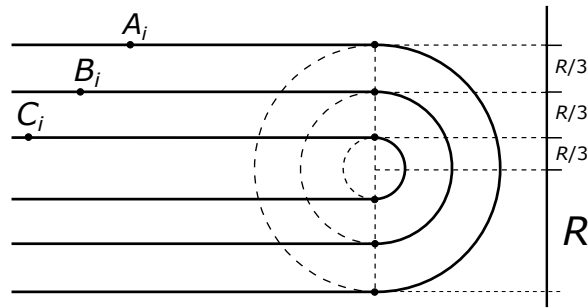
(a) Calcule  $(18 \oplus 25) \otimes 11$ .

(b) Sabe-se que:  $a \oplus b = 2$  e  $a \otimes 1 = 2$ . Podemos concluir que  $b$  é um múltiplo de 3? Justifique.

(c) Qual o valor de  $\underbrace{5 \oplus 5 \oplus 5 \oplus \dots \oplus 5 \oplus 5}_{2019 \text{ vezes}}$ ?

(d) Qual o valor de  $\underbrace{5 \otimes 5 \otimes 5 \otimes \dots \otimes 5 \otimes 5}_{2019 \text{ vezes}}$ ?

3. Deseja-se construir uma pista de corrida para 3 competidores. A figura mostra a vista aérea da pista que consiste de segmentos de retas paralelos e de semicircunferências. O raio da maior semicircunferência mede  $R = 12$  m.



Para que o percurso de cada competidor seja de mesmo comprimento, é necessário marcar os pontos de partida  $A_i$ ,  $B_i$  e  $C_i$  em cada pista.

- (a) Calcule a distância que  $B_i$  e  $C_i$  terão de ser marcados em relação a  $A_i$ , de maneira que o percurso seja o mesmo para os 3 competidores.

- (b) Os pontos  $A_i$ ,  $B_i$  e  $C_i$  são colineares (isto é, estão ao longo da mesma reta)? Justifique.

4. Considere cinco números naturais, não necessariamente todos distintos entre si. Se  $a$  e  $b$  são dois números quaisquer desses cinco números, todos os resultados possíveis da soma  $a + b$  são 31, 38 e 45. Quais são esses cinco números?