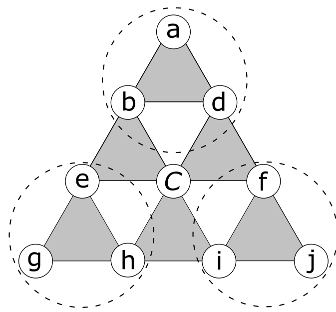
IV OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA - 2019

NÍVEL III- 2ª FASE - Gabarito

1. (a) Sejam T a soma dos números dos vértices de um triângulo cinza e C o número do círculo central.



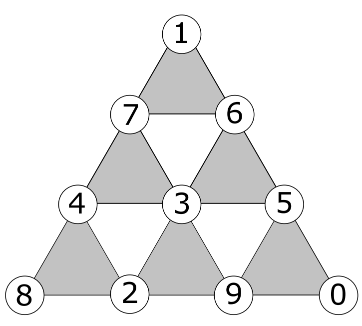
Agrupando como na figura (a soma dos números dentro de cada círculo pontilhado é igual a T), temos:

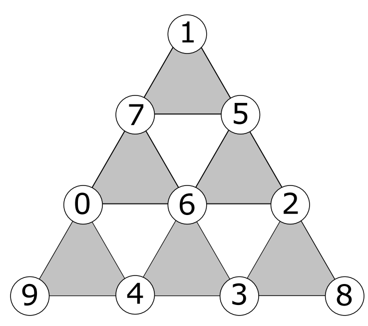
$$
\begin{aligned}
&T + T + T + C = 0 + 1 + 2 + ... + 8 + 9\\
&3T + C = 45\\
&T = 15 - \frac{C}{3}.
\end{aligned}
$$

Dessa expressão, sabemos que C deve ser um múltiplo de 3, isto é, $C = 0, 3, 6$ ou 9. Nomeie as posições como na figura. Se $C = 0$, teremos $T = 15$. Portanto, $b + e = d + f = h + i = 15$. Mas, não existem seis números distintos dentre $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9 que satisfaçam essas igualdades. De maneira análoga, se $C = 9$, então $T = 12$ e $b + e = d + f = h + i = 3$. Novamente, não há seis números distintos dentre $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ e 8 que satisfaçam as igualdades. Assim, há duas possibilidades: $C = 3$ e $T = 14$ ou $C = 6$ e $T = 13$.

(b) Pelo item anterior, o número 3 ou o número 6 deve ser escrito no círculo central.

(c) As soluções estão apresentadas nas figuras. As outras possibilidades são obtidas por rotação ou reflexão do triângulo maior.





2. (a) Pela definição temos:

$$\lceil 3,1415 \rceil = 4 \text{ e } \lceil -4,3333... \rceil = -4.$$

(b) Como $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$, então $2 < \sqrt{5} < 3$. Assim, $\lceil \sqrt{5}\ \rceil = 3$.

(c) Note que a expressão $\left\lceil \dfrac{2x^2}{x^2+4} \right\rceil = x-1$ também pode ser escrita da forma $\left\lceil 2 - \dfrac{8}{x^2+4} \right\rceil = x-1$. O menor valor de x^2+4 é 4 (quando $x = 0$). Assim, o maior valor do termo $\dfrac{8}{x^2+4}$ é 2. Logo, o lado esquerdo da expressão nunca será negativo. Com isso, a equação não terá soluções negativas.

Para $x = 0$, temos:

$$\left\lceil 2 - \frac{8}{x^2+4} \right\rceil = \left\lceil 2 - \frac{8}{0^2+4} \right\rceil = \lceil 2-2 \rceil = 0 \neq 0-1.$$

Para $x = 1$, temos:

$$\left\lceil 2 - \frac{8}{x^2+4} \right\rceil = \left\lceil 2 - \frac{8}{1^2+4} \right\rceil = \left\lceil 2 - \frac{8}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{2}{5} \right\rceil = 1 \neq 1-1.$$

Para $x = 2$, temos:

$$\left\lceil 2 - \frac{8}{x^2+4} \right\rceil = \left\lceil 2 - \frac{8}{2^2+4} \right\rceil = \lceil 2-1 \rceil = \lceil 1 \rceil = 1 = 2-1,$$

ou seja, a equação é satisfeita.

Para $x = 3$, temos:

$$\left\lceil 2 - \frac{8}{x^2+4} \right\rceil = \left\lceil 2 - \frac{8}{3^2+4} \right\rceil = \left\lceil 2 - \frac{8}{13} \right\rceil = \left\lceil \frac{18}{13} \right\rceil = 2 = 3-1,$$

também satisfazendo a equação.

Para todo inteiro x maior que 3, o termo $\dfrac{8}{x^2+4}$ é positivo e menor que 1 e, portanto, $\left\lceil 2 - \dfrac{8}{x^2+4} \right\rceil = 2$ para todo x maior que 3. Isso implica que a equação não tem solução para $x > 3$, logo as únicas soluções são $x = 2$ e $x = 3$.

3. (a) Para estes valores de lados, temos:

$$s = \frac{8+5+6}{2} = \frac{19}{2} \quad \text{ e } \quad A = \sqrt{\frac{19}{2}\left(\frac{19}{2}-8\right)\left(\frac{19}{2}-5\right)\left(\frac{19}{2}-6\right)} = \frac{3}{4}\sqrt{399}.$$

(b) Sejam h_1, h_2 e h_3 as alturas relativas aos lados $8, 5$ e 6, respectivamente. Do item (a) conhecemos a área do triângulo, então:

$$A = \frac{h_1 \cdot 8}{2} \Rightarrow \frac{3}{4}\sqrt{399} = 4h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{3}{16}\sqrt{399}\ ;$$

$$A = \frac{h_2 \cdot 5}{2} \Rightarrow \frac{3}{4}\sqrt{399} = \frac{5}{2}h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{3}{10}\sqrt{399}\ ;$$

$$A = \frac{h_3 \cdot 6}{2} \Rightarrow \frac{3}{4}\sqrt{399} = 3h_3 \Rightarrow h_3 = \frac{1}{4}\sqrt{399}\ .$$

(c) Sejam a, b e c os lados do triângulo correspondentes às alturas $20, 28$ e 35, respectivamente, e A a área desse triângulo. Então:

$$A = \frac{a \cdot 20}{2} = \frac{b \cdot 28}{2} = \frac{c \cdot 35}{2} \Rightarrow a = \frac{7}{5}b \quad \text{e} \quad c = \frac{4}{5}b.$$

Assim, segue que

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}b + b + \frac{4}{5}b\right) = \frac{8}{5}b.$$

Pela fórmula de Heron, obtemos:

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\
\frac{28b}{2} &= \sqrt{\frac{8}{5}b\left(\frac{8}{5}b - \frac{7}{5}b\right)\left(\frac{8}{5}b - b\right)\left(\frac{8}{5}b - \frac{4}{5}b\right)} \\
14b &= \frac{b^2}{25}\sqrt{8 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4} \\
b &= \frac{175}{2\sqrt{6}}.
\end{aligned}$$

Por fim, como $a = \frac{7}{5}b$ e $c = \frac{4}{5}b$, segue que:

$$\begin{aligned}
a = \frac{7}{5} \cdot \frac{175}{2\sqrt{6}} \Rightarrow a = \frac{245}{2\sqrt{6}} \\
c = \frac{4}{5} \cdot \frac{175}{2\sqrt{6}} \Rightarrow c = \frac{70}{\sqrt{6}}\ .
\end{aligned}$$

4. (a) Pedro tem um total de 14 moedas. Dessas, ele deve escolher 5, portanto há

$$\frac{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{5!}$$

maneiras de pegar as moedas (divide-se por 5! para excluir maneiras equivalentes, pois a ordem não importa neste contexto).

(b) Se ele pegar apenas uma moeda de R\$ $1,00$ ele não conseguirá pagar, pois mesmo que as outras 4 moedas fossem de R\$ $0,50$, o total seria R\$ $3,00$. Se ele pegar 2 moedas de R\$ $1,00$, ele pode conseguir pagar (se as outras 3 moedas forem de R\$ $0,50$ o total será de R\$ $3,50$). Então, o número mínimo de moedas de R\$ $1,00$ é 2.

(c) Vamos contar os casos favoráveis separando em números de moedas de R\$ $1,00$. Se Pedro pegar:

- 4 moedas de R\$ $1,00$, a outra pode ser qualquer uma das 10 restantes, então há 10 possibilidades;

- 3 moedas de R\$ $1,00$ (há 4 escolhas possíveis), a única possibilidade de não conseguir pagar é se ele pegar as 2 restantes de R\$ $0,05$. Portanto, das 10 moedas restantes ele pode escolher 2, exceto o caso anterior. Assim, há $\dfrac{10 \times 9}{2!} - 1$ possíveis escolhas dessas moedas. No total, há $4 \times \left(\dfrac{10 \times 9}{2!} - 1\right)$ casos;

- 2 moedas de R\$ $1,00$ (há $\dfrac{4 \times 3}{2}$ escolhas possíveis), ele conseguirá pagar se pegar as 3 moedas de R\$ $0,50$ (há $\dfrac{5 \times 4 \times 3}{3!}$ possíveis escolhas) ou 2 de R\$ $0,50$ e uma de R\$ $0,25$ (há $\dfrac{5 \times 4}{2} \times 3$ escolhas). Logo, há $\dfrac{5 \times 4 \times 3}{3!} + \dfrac{5 \times 4}{2} \times 3 = 40$ escolhas possíveis e um total de $\dfrac{4 \times 3}{2} \times 40$ casos favoráveis.

O número de casos totais foi encontrado no item (a), então a probabilidade de, ao pegar 5 moedas aleatórias e ter dinheiro suficiente para pagar o transporte, é:

$$\frac{10 + 4\left(\frac{10 \times 9}{2!} - 1\right) + \left(\frac{4 \times 3}{2}\right) \times 40}{\frac{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{5!}} = \frac{213}{1001}.$$