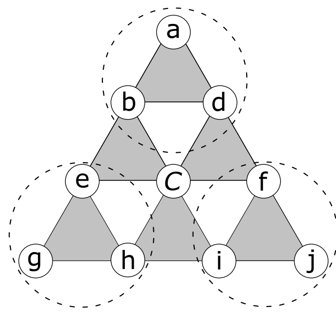
IV OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA - 2019

NÍVEL II - 2ª FASE - Gabarito

1. (a) Sejam T a soma dos números dos vértices de um triângulo cinza e C o número do círculo central.



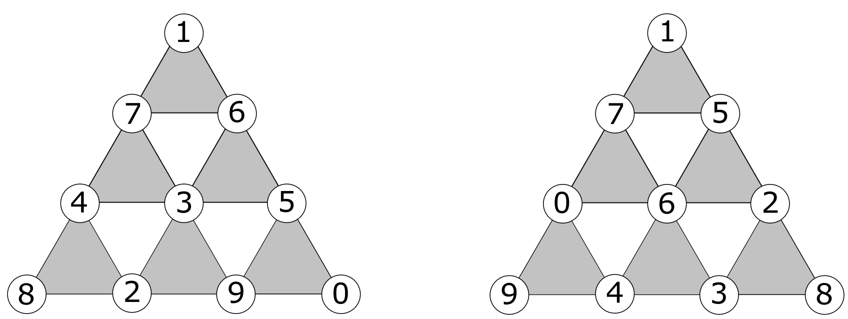
Agrupando como na figura (a soma dos números dentro de cada círculo pontilhado é igual a T), temos:

$$T + T + T + C = 0 + 1 + 2 + ... + 8 + 9$$
$$3T + C = 45$$
$$T = 15 - \frac{C}{3}.$$

Dessa expressão, sabemos que C deve ser um múltiplo de 3, isto é, $C = 0, 3, 6$ ou 9. Nomeie as posições como na figura. Se $C = 0$, teremos $T = 15$. Portanto, $b + e = d + f = h + i = 15$. Mas, não existem seis números distintos dentre $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9 que satisfaçam essas igualdades. De maneira análoga, se $C = 9$, então $T = 12$ e $b + e = d + f = h + i = 3$. Novamente, não há seis números distintos dentre $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ e 8 que satisfaçam as igualdades. Assim, há duas possibilidades: $C = 3$ e $T = 14$ ou $C = 6$ e $T = 13$.

(b) Pelo item anterior, o número 3 ou o número 6 deve ser escrito no círculo central.

(c) As soluções estão apresentadas nas figuras. As outras possibilidades são obtidas por rotação ou reflexão do triângulo maior.



2. (a) Como D é ponto médio de $\overline{AC}$ temos $\overline{AD} = \overline{CD} = 12$. O triângulo ADB é retângulo. Então, pelo teorema de Pitágoras, vale:

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 &= \overline{BD}^2 \\ \overline{AB}^2 + 12^2 &= 20^2 \\ \overline{AB} &= 16. \end{aligned}$$

Logo, a área do triângulo ABC é: $\dfrac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{2} = \dfrac{16 \times 24}{2} = 192.$

(b) Como E é ponto médio de $\overline{AB}$, temos $\overline{AE} = \dfrac{\overline{AB}}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$. O triângulo AEC é retângulo. Então, pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$$\begin{aligned} \overline{CE}^2 &= \overline{AE}^2 + \overline{AC}^2 \\ \overline{CE}^2 &= 8^2 + 24^2 \\ \overline{CE} &= 8\sqrt{10}. \end{aligned}$$

(c) *1ª solução*: O segmento $\overline{AC}$ é a altura do triângulo BEC em relação ao lado $\overline{BE}$. Assim, a área do triângulo BEC é:

$$\frac{\overline{BE} \times \overline{AC}}{2} = \frac{8 \times 24}{2} = 96.$$

2ª solução: Como E é o ponto médio de $\overline{AB}$ a área do triângulo BEC é metade da área do triângulo ABC. Assim, usando o resultado do item (a), a área do triângulo BEC é igual a $\dfrac{192}{2} = 96$.

3. (a) Começando por 2 e com a razão 3 temos: $2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23$. O 8° termo é 23.

(b) A soma pode ser calculada somando o 1° termo com o último, o 2° com o penúltimo e assim por diante:

$$(2 + 23) + (5 + 20) + (8 + 17) + (11 + 14) = 25 + 25 + 25 + 25 = 100.$$

(c) Considere a progressão aritmética $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ de razão r. O termo geral dessa progressão é $a_n = a_1 + (n-1)r$ e a soma dos n primeiros termos dessa progressão é $\dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$. Considere, agora, uma progressão aritmética de 10 inteiros positivos cuja soma dos elementos é menor ou igual a 250. Então:

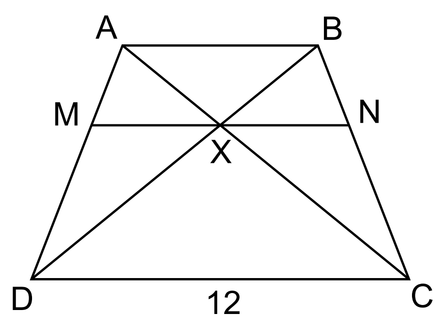
$$\begin{aligned} \frac{(a_1 + a_{10}).10}{2} &\leq 250 \\ a_1 + a_{10} &\leq 50 \\ a_1 + [a_1 + (10-1)r] &\leq 50 \\ 2a_1 + 9r &\leq 50. \end{aligned}$$

Temos, portanto, as possibilidades:

- se $r = 1, a_1 \leq \dfrac{41}{2} = 20,5 \Rightarrow$ Há 20 possíveis valores para a_1;
- se $r = 2, a_1 \leq \dfrac{32}{2} = 16 \Rightarrow$ Há 16 possíveis valores para a_1;
- se $r = 3, a_1 \leq \dfrac{23}{2} = 11,5 \Rightarrow$ Há 11 possíveis valores para a_1;
- se $r = 4, a_1 \leq \dfrac{14}{2} = 7 \Rightarrow$ Há 7 possíveis valores para a_1;
- se $r = 5, a_1 \leq \dfrac{5}{2} = 2,5 \Rightarrow$ Há 2 possíveis valores para a_1;
- se $r \geq 6$ não há progressões que satisfaçam o enunciado.

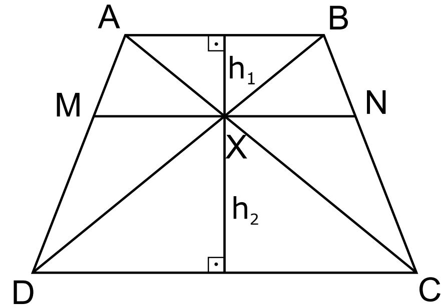
Assim, há $20 + 16 + 11 + 7 + 2 = 56$ progressões aritméticas de 10 números positivos (cuja a razão é diferente de zero) tal que a soma dos elementos é menor ou igual a 250.
Obs.: Se considerássemos razões negativas ($r = -1, r = -2$ etc) encontraríamos as mesmas progressões aritméticas possíveis (apenas em ordem decrescente).

4. (a) De acordo com o enunciado a figura é:



(b) Sim. Os ângulos $A\hat{X}B$ e $D\hat{X}C$ são iguais, pois são opostos pelo vértice. Como os lados AB e DC são paralelos, os ângulos $A\hat{B}D$ e $C\hat{D}B$ são iguais (alternos internos). Como os triângulos ABX e CDX têm dois ângulos iguais, eles são semelhantes.

(c) Sejam h_1 e h_2 as alturas relativas aos lados AB e DC, respectivamente, e considere $\overline{AB} = x$ (veja figura).



Pelo item (b), sabemos que os triângulos ABX e CDX são semelhantes, então:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{x}{12} \Rightarrow xh_2 = 12h_1.$$

Os quadriláteros $ABCD$, $ABNM$ e $MNCD$ são trapézios e a relação de suas áreas é:

$$\begin{array}{rcl}
A_{ABCD} & = & A_{ABNM} + A_{MNCD} \\
\dfrac{(\overline{AB} + \overline{DC})(h_1 + h_2)}{2} & = & \dfrac{(\overline{AB} + \overline{MN})h_1}{2} + \dfrac{(\overline{MN} + \overline{DC})h_2}{2} \\
(x + 12)(h_1 + h_2) & = & (x + 10)h_1 + (10 + 12)h_2 \\
xh_2 + 2h_1 & = & 10h_2.
\end{array}$$

Substituindo a relação $xh_2 = 12h_1$, obtemos:

$$12h_1 + 2h_1 = 10h_2 \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{5}{7}.$$

Substituindo a relação acima em $xh_2 = 12h_1$, concluímos que:

$$x = 12\ \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow x = 12\ \frac{5}{7} \Rightarrow x = \frac{60}{7}.$$