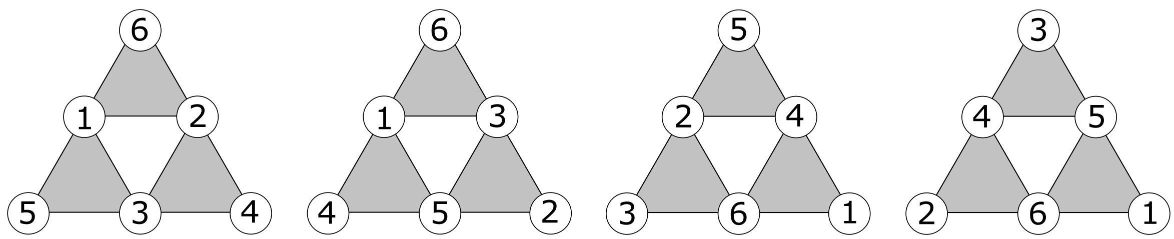
IV OLIMPÍADA LAVRENSE DE MATEMÁTICA - 2019

NÍVEL I - 2ª FASE - Gabarito

1. (a) A soma pode ser 9, 10, 11 ou 12. Primeiro, note que a menor soma possível é 9 (um triângulo com os números 1, 2 e 6 nos vértices) e a maior soma possível é 15 (um triângulo com os números 4, 5 e 6 nos vértices). Segundo, considere dois triângulos cinzas, um com vértices a, b e c e outro com vértices x, y e z. Qualquer que seja a escolha dos triângulos há um vértice em comum. Suponha, então, que $c = z$. Como a soma dos vértices deve ser igual concluímos que $a + b = x + y$. Se $a = 6$ e $x = 1$, por exemplo, teremos $5 + b = y$. Mas, não há solução para esta equação dentre os números restantes (2, 3, 4 e 5). Portanto, concluímos que os números 1 e 6 devem estar nos vértices de um mesmo triângulo. Assim, a soma pode ser no máximo 12 (colocando o número 5 no terceiro vértice desse triângulo).

   Obs.: Qualquer uma das quatro respostas foi considerada como total na correção.

   (b) As possibilidades estão apresentadas nas figuras (outras possibilidades são obtidas por rotação ou reflexão do triângulo maior).



   Obs.: Qualquer uma dessas possibilidades ou suas variações foi considerada como total na correção.

2. (a) Uma vez que $18+25 = 43 = 42+1$, temos $18 \oplus 25 = 1$ e, portanto, $(18 \oplus 25) \otimes 11 = 1 \otimes 11$. Como $1 \times 11 = 11 = 9 + 2$, temos $1 \otimes 11 = 2$ e, então, $(18 \oplus 25) \otimes 11 = 2$.

   (b) Sim. Como $a \otimes 1 = 2$, temos que $a \times 1$ é um múltiplo de 3 mais 2 unidades, isto é, $a = 3q + 2$ para algum q inteiro. E de $a \oplus b = 2$ concluímos que $a + b = 3k + 2$ para algum k inteiro. Então:

$$
\begin{aligned}
a + b &= 3k + 2 \\
3q + 2 + b &= 3k + 2 \\
b &= 3k - 3q \\
b &= 3(k - q),
\end{aligned}
$$

   ou seja, b é múltiplo de 3.

(c) *1ª solução*: Note que $\underbrace{5+5+5+\cdots+5}_{2.019\text{ parcelas}} = 5\times 2.019 = 10.095 = 3\times 3.365$.

Logo, $\underbrace{5\oplus 5\oplus 5\oplus\cdots\oplus 5\oplus 5}_{2.019\text{ vezes}} = 0$.

2ª solução: Temos $\underbrace{5\oplus 5}_{1}\oplus\underbrace{5\oplus 5}_{1}\ldots\underbrace{5\oplus 5}_{1}\oplus 5$.

Como $1.014 = 3\times 338$, a estrutura acima nos dá:

$$\underbrace{\underbrace{5\oplus 5}_{1}\oplus\underbrace{5\oplus 5}_{1}\ldots\underbrace{5\oplus 5}_{1}}_{1.009\text{ vezes}}\oplus 5 = 1.009\oplus 5 = 0.$$

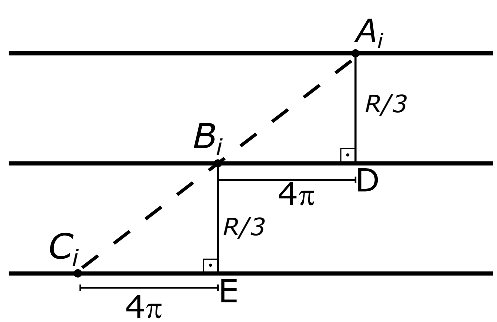
(d) *1ª solução*: Pela definição das operações, vale:

$$\underbrace{\underbrace{5\otimes 5}_{1}\otimes\underbrace{5\otimes 5}_{1}\ldots\underbrace{5\otimes 5}_{1}}_{1\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1=1}\otimes 5 = 1\otimes 5 = 2.$$

2ª solução: Precisamos saber qual o resto da divisão de $\underbrace{5\times 5\times\cdots\times 5}_{2.019\text{ fatores}} = 5^{2.019}$ por 3. Note que o resto da divisão de 5^n por 3 é igual a 1 se n é par e é igual a 2 se n é ímpar. Como 2.019 é ímpar, concluímos que o resto da divisão de $5^{2.019}$ por 3 é igual a 2. Assim, $\underbrace{5\otimes 5\otimes 5\otimes\cdots\otimes 5\otimes 5}_{2.019\text{ vezes}} = 2$.

3. (a) A diferença na trajetória de cada atleta deve-se apenas aos trajetos circulares (uma vez que os segmentos são paralelos). O atleta que parte de A_i percorre uma trajetória circular de $\pi R = 12\pi$ metros. Já quem parte de B_i percorre $\pi(\frac{2}{3}R) = \pi(\frac{2.12}{3}) = 8\pi$ metros e quem parte de C_i percorre $\pi(\frac{R}{3}) = \pi(\frac{12}{3}) = 4\pi$ metros. Portanto, para compensar, a distância entre A_i e B_i deve ser de 4π metros e a distância de C_i para A_i deve ser de 8π metros.

(b) Sim. A figura mostra as distâncias entre os pontos e entre os segmentos.



O triângulo que contém os vértices A_i e B_i é congruente ao triângulo que contém os vértices B_i e C_i (pois possuem dois lados congruentes e o ângulo entre eles também). Assim, seus ângulos correspondentes são iguais. Logo:

$$\widehat{A_iB_iD} + \widehat{DB_iE} + \widehat{EB_iC_i} = 180°.$$

Portanto, os pontos A_i, B_i e C_i são colineares.

4. Considere os cinco números naturais x, y, z, w e s. Como há três possíveis resultados para a soma, devemos ter três deles iguais, digamos $z = w = s$. Portanto, temos cinco números naturais x, y, z, z, z, com $x \neq y$, $x \neq z$ e $y \neq z$. A soma de dois números naturais iguais é par, então:

$$z + z = 38 \Rightarrow 2z = 38 \Rightarrow z = 19.$$

Assim, $x + z = 31 \Rightarrow x + 19 = 31 \Rightarrow x = 12$. E, de forma semelhante, $y + z = 45 \Rightarrow y + 19 = 45 \Rightarrow y = 26$. Os cinco números procurados são $12, 26, 19, 19$ e 19.